EDITORIAL MAR CARIBE

Autores:
Ruben Dario Mendoza Arenas
Hugo Eladio Chumpitaz Caycho
Ericka Nelly Espinoza Gamboa
José Eduardo Zorrilla Diaz
Santiago Rodolfo Aguilar Loyaga
Jonhy Saturnino Garay Santisteban

EMPLEO DEL MÉTODO PÓLYA COMO ESTRATEGIA EDUCATIVA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ISBN: 978-612-49219-3-3
Depósito Legal N°: 2023-01904

Empleo del método Polya como estrategia educativa en estudiantes universitarios para la resolución de problemas

Ruben Dario Mendoza Arenas, Hugo Eladio Chumpitaz Caycho, Ericka Nelly Espinoza Gamboa, José Eduardo Zorrilla Diaz, Santiago Rodolfo Aguilar Loyaga, Jonhy Saturnino Garay Santisteban

Adaptado por: Ruben Dario Mendoza Arenas
Compilador: Ysaelen Odor

Jefe de arte: Yelitza Sánchez
Diseño de cubierta: Josefrank Pernalete Lugo
Ilustraciones: Ruben Dario Mendoza Arenas

Editado por: Editorial Mar Caribe de Josefrank Pernalete Lugo
Jr. Leoncio Prado, 1355 – Magdalena del Mar, Lima-Perú
RUC: 15605646601
Libro electrónico disponible en http://editorialmarcaribe.es/?page_id=1015
Primera edición – marzo 2023
Formato: electrónico

ISBN: 978-612-49219-3-3
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°: 2023-01904

Índice

Introducción

La resolución de problemas resulta ser uno de los temas que se ha abordado con gran interés y preocupación en la investigación educativa reciente. Para Gaulin (2001), hablar de problemas significa pensar en aquellas situaciones que requieren reflexión, búsqueda, investigación y respuesta, pensar en soluciones y definir una estrategia de solución que no lleve, necesariamente, a una solución rápida y certera.

El surgimiento del enfoque de resolución de problemas como preocupación didáctica se deriva del aprendizaje como una construcción social que involucra supuestos, pruebas y refutaciones basadas en procesos creativos. Con base en este punto de vista, el objetivo del estudio es enfatizar actividades que conducen a situaciones problemáticas, cuya solución requiere análisis, descubrimiento, desarrollo de hipótesis, reflexión, argumentación y comunicación de ideas.

De esta forma, surge como necesidad la disponibilidad de la información declarativa y procesal necesaria para solucionar el problema que se presenta. Se refiere a la búsqueda consciente de un modelo que promueva el desarrollo de un estudiante independiente que, en interacción con el conocimiento y el mundo que le rodea, aprende y organiza su conocimiento como parte de su construcción personal y profesional. Expresa Parra (1990) que un problema se constituye como tal, en la medida en que el sujeto a quien se le presenta tiene los elementos para comprender la situación que el problema describe pero no cuenta con un sistema de respuesta completamente formado que permite una solución inmediata.

Esta intención en el sentido es definida por Pólya en 1965, para quien un problema significa una búsqueda consciente de una acción adecuada para alcanzar una meta clara, pero no inmediatamente alcanzable. Es en esta búsqueda que una idea derivada del aporte de Newell y Simon (1972) dentro de la psicología cognitiva muestra que el problema puede verse como la diferencia entre el estado inicial y el estado final que constituye la meta alcanzable.

El papel de los problemas en el currículo universitario, tanto en materias exactas como naturales, no es nuevo. En algunos casos, como en las ciencias matemáticas, aparecen desde la antigüedad según Stanic y Kilpatrick (1989). En otras, como física y química, siguieron la enseñanza de aquellas disciplinas que se refieren a situaciones de evidencia. Sin embargo, aparecen problemas relacionados con situaciones nuevas que deben ser resueltas junto con nuevas tendencias educativas que exigen a los estudiantes desarrollar ciertas habilidades y destrezas a expensas de percepciones que considere la educación científica.

De esta manera, aparecen otros significados que son consistentes con esta perspectiva: es necesario mostrar un enfoque científico recreativo que resuelva problemas cotidianos y los ponga a disposición de los estudiantes para demostrar que se puede aprender ciencia. La resolución de problemas se utiliza como estrategia de enseñanza desde la perspectiva de los profesores y el aprendizaje desde la perspectiva de los estudiantes. Están presentes en argumentos que justifican la naturaleza del proceso de solución en las prácticas de aula, destacando las características que se le otorgan y el lugar de dicho proceso.

Capítulo 1

Metodologías didácticas

Es preciso explicar conceptualmente los dos elementos de enseñanza-aprendizaje referidos a las estrategias educativas: "competencias" y "metodología didáctica". Ambos conceptos son relativamente abstractos, y hoy en día es muy común usarlos cuando se habla de temas educativos, porque son usados frecuentemente en la universidad, sin embargo en muchas ocasiones sucede que no en todas las instituciones de educación tienen el mismo significado.

Este capítulo, estará centrado en las metodologías didácticas, se comentarán algunas de sus clasificaciones más habituales y se presentaran criterios y aspectos, a partir de los cuales se elige la más adecuada a los diversos fines y situaciones educativas. A continuación, se presentaran brevemente las metodologías didácticas más innovadoras y adecuadas para la enseñanza y el aprendizaje de las competencias de los estudiantes. Así, también se mostraran algunos detalles breves sobre la evaluación de competencias y también algunas propuestas o "métodos de evaluación" que se consideran innovadores y generalmente poco conocidos.

1.1. Competencias en la educación

Si bien al termino competencia, se le ha otorgado un papel importante al relacionarlo con la educación superior (universitaria y no universitaria) y en las distintas legislaciones nacionales, este concepto no ha sido definido de forma precisa y especifica. Para ilustrar este punto, tenemos el caso español, en donde los resultados de aprendizaje y las cualificaciones han sido sustituidos o interpretados como "conocimientos, competencias y habilidades" por la normativa de desarrollo original de la Ley Orgánica de Universidades (LOU).

En el ámbito universitario, la definición más habitual y común es la de González, J. y Wagenaar, R. (2003) en el proyecto "Tuning Educational Structures in Europe"[1], quienes definen la competencia como "una combinación dinámica de características relacionadas con conocimientos, habilidades, actitudes y responsabilidades que describen los resultados de aprendizaje de un programa educativo o lo que los estudiantes son capaces de demostrar al final del proceso educativo”. Este enfoque de la educación como factor innovador demuestra que es necesario enseñar “a conocer y comprender”, pero también conlleva una obligación, enseñar “a ser capaz de aplicar”, a “comunicar”, a “evaluar críticamente” y a “aprender de forma autónoma”.

Así se tiene que una competencia es la “capacidad de una persona (conocimiento, destreza o habilidad y actitud o valores) para afrontar con grandes posibilidades de éxito una tarea o problema en un contexto/situación determinado”. De forma habitual a nivel universitario se ha diferenciado entre dos tipos de competencias:

1.1.1. Competencias específicas

Este tipo de competencias son esenciales para cualquier puesto de trabajo y/o profesión porque están específicamente relacionadas con conocimientos específicos en un tema en particular y capacitan para una actividad profesional en particular. Algunas de estas habilidades pueden compartirse entre profesiones y/o títulos de trabajo. Ejemplo de competencia específica: "Analizar críticamente la eficacia

1. El “Tuning Educational Structures in Europe”, conocido simplemente como “El Tuning”, es un proyecto europeo enmarcado en el programa Erasmus de movilidad universitaria, con el que se han desarrollado redes universitarias europeas temáticas (física, enfermería, historia, etc.) con el propósito de orientar la implantación del proceso de Bolonia.

docente, las buenas prácticas y el liderazgo con la ayuda de indicadores de calidad".

1.1.1.1. Diversas competencias específicas

Para ilustrar este punto se expondrán diversas competencias a recogidas de diversos libros blancos de varias universidades europeas y están referidas a distintos grados en ciencias:

Grado en Química

- Capacidad para demostrar conocimiento y comprensión de hechos, conceptos, principios y teorías relevantes relacionados con áreas de la química.

- Resolver problemas cualitativos y cuantitativos según modelos desarrollados previamente.

- Identificar y analizar nuevos problemas y planificar estrategias para solucionarlos.

- Evaluación, interpretación y síntesis de datos e información química.

- Identificar y aplicar buenos métodos científicos de medición y prueba.

- Procesar y calcular datos relacionados con datos químicos.

- Manipulación de productos químicos de manera segura.

- Realización de procedimientos estándares de laboratorio relacionados con el trabajo analítico y sintético en sistemas orgánicos e inorgánicos.

- Seguimiento mediante la observación y medición de propiedades químicas, eventos o cambios y registro sistemático y fiable en la documentación correspondiente.

- Diseño, planificación y ejecución de investigaciones prácticas desde la etapa de identificación del problema hasta la evaluación y evaluación de resultados y hallazgos.

- Dominio de instrumentos químicos estándar como los utilizados para estudios estructurales y separaciones.

- Interpretar datos de observaciones y medidas de laboratorio de acuerdo con su significado y las teorías que los sustentan.

- Evaluación de riesgos en el uso de sustancias químicas y métodos de laboratorio.

Grado en Biología

- Identificación de diferentes niveles de organización en un sistema vivo

- Realización de análisis genéticos

- Identificación de evidencia paleontológica

- Identificación de organismos

- Catalogación y evaluación de recursos naturales

- Análisis filogenético

- Uso de bioindicadores

- Aislamiento metabólico, análisis e identificación de biomoléculas

- Diagnóstico molecular

- Determinación microscópica de órganos, tejidos, células y orgánulos y sus anomalías

- Aislamiento y cultivo de microorganismos y virus

- Cultivos de células y tejidos

- Muestreo, procesamiento, conservación y observación de muestras y especímenes

- Mejora de la producción animal y vegetal

- Ensayos y determinación de parámetros vitales utilizando microbios funcionales

- Bioensayos

- Descripción y análisis del medio físico

- Diagnóstico de problemas ambientales

- Muestreo, caracterización y manejo de poblaciones

- Manejo, conservación y restauración de poblaciones y ecosistemas

- Monitoreo bioecotécnico

- Interpretación y orientación del paisaje
- Evaluación de impacto ecológico

Grado en Matemáticas

- Determinación de modelos matemáticos para situaciones reales
- Resolución de modelos utilizando métodos analíticos, numéricos o estadísticos
- Visualización e interpretación de soluciones
- Participación en la implementación de programas informáticos
- Diseño e implementación de algoritmos de simulación
- Identificación y localización del conocimiento lógico
- Aplicaciones en la toma de decisiones
- Transferir la experiencia matemática a un contexto no matemático
- Análisis informacional de estadísticas con herramientas

- Diseño de experimentos y estrategias

- Uso de herramientas informáticas

- Participación en la organización y gestión de proyectos

Grado en Física

- Obtener calificaciones adicionales para la profesión a través de unidades voluntarias distintas a la física (actitudes/habilidades personales).

- Comprender la naturaleza de la investigación física, las formas en que se lleva a cabo y cómo la investigación física es aplicable a muchos campos, como la ingeniería; la capacidad de diseñar métodos experimentales y/o teóricos para: (i) resolver problemas actuales de investigación académica o industrial; (ii) mejorar los resultados existentes (habilidades de investigación básica y aplicada).

- Estar capacitado para trabajar en un grupo interdisciplinario, para presentar los resultados de su investigación o resultados de búsqueda bibliográfica tanto a especialistas como al público en general (habilidades especiales de comunicación).

- Capacidad para realizar las siguientes actividades: actividades profesionales aplicadas en el campo técnico tanto a nivel de laboratorio como a nivel industrial, relacionadas con la física en general y el blindaje contra la radiación en particular; comunicación, sensor de control remoto, control remoto de satélites, control de calidad, participación en centros de investigación del sector público y privado (incluida la gestión); considera temas de análisis y modelado, así como aspectos complejos de física y computación.

- Capacidad para realizar las siguientes actividades: promover y desarrollar la innovación científica y tecnológica; diseño y gestión de tecnologías relacionadas con la física en áreas como la industria, el medio ambiente, la salud, el patrimonio cultural, la administración pública, la banca; popularización avanzada de la cultura científica y aspectos de la física clásica y moderna. (Cantidad de trabajo disponible).

- Capacidad para comparar nuevos datos experimentales con modelos existentes y verificar su validez, además de recomendar cambios para adaptar los modelos a los datos. (Habilidades modelo).

- Con el apoyo de técnicas científicas extensivas que se ofrecen en el plan de estudios, el estudiante/egresado debe ser capaz de desarrollar un sentido de responsabilidad personal debido a la libre elección de cursos (Personas/habilidades profesionales).

- Capacidad para iniciar nuevos campos de trabajo e investigación a través de estudios independientes (Cuestión de aprender a aprender).

- Capacidad para evaluar claramente magnitudes, formarse una comprensión clara de situaciones que son físicamente diferentes, pero muestran similitudes que permiten el uso de soluciones conocidas a problemas nuevos (Habilidades para resolver problemas).

- Habilidad para aplicar la esencia del proceso/situación y crear un modelo operativo a partir de ella; el graduado debe ser capaz de hacer las aproximaciones requeridas para reducir el problema a un nivel manejable; pensamiento crítico para crear modelos físicos (Modelado y resolución de problemas).

- Capacidad de interpretar cálculos de forma independiente, incluso si se necesita una computadora pequeña o grande, el egresado debe ser capaz de desarrollar software (Resolución de problemas e informática).

- Capacidad para encontrar y utilizar bibliografía física y otras ciencias y cualquier fuente de información relevante para la investigación y el desarrollo técnico de proyectos (Búsqueda bibliográfica y otras habilidades).

- Capacidad de comprender los problemas sociales de la profesión y comprender los aspectos éticos de la investigación de la actividad profesional de la física y la responsabilidad de proteger la salud pública y el medio ambiente (Conciencia ética general y específica).

- Capacidad para trabajar de manera muy independiente, incluso asumiendo la responsabilidad de la planificación de proyectos y la gestión de estructuras (Habilidades directivas).

- Prepararse para optar al puesto de profesor de física de bachillerato (Alcance del trabajo realizado).

- Aprovechar la función de estar al tanto de los nuevos desarrollos y la capacidad de brindar asesoramiento profesional sobre diversas aplicaciones posibles (Habilidades especiales de actualización).

- Tener un conocimiento profundo de los fundamentos de la física moderna, como la teoría cuántica, etc. (Profunda cultura general en física).

- Poseer buen conocimiento de al menos una materia de física especial actual (Conocer las limitaciones de la investigación).

- Obtención de comprensión de las teorías más importantes de la física al encontrar su estructura lógica y matemática, su soporte experimental y el fenómeno físico que describen (Comprensión teórica de los fenómenos físicos).

- Conocer la “obra de los genios”, es decir, la variedad de los descubrimientos físicos y las teorías (Sensibilidad a estándares absolutos).

- Conocer las áreas más importantes de la física no sólo por su importancia intrínseca, sino también por la importancia futura y sus posibles aplicaciones, conocimiento de enfoques multidisciplinares de la física (Conocimientos generales de física).

- Familiarizarse con los modelos experimentales más importantes y ser capaz de realizar experimentos de forma autónoma y describir, analizar y evaluar críticamente los datos experimentales (Habilidades experimentales y de laboratorio).

- Mejorar las habilidades en idiomas extranjeros a través de cursos impartidos en otros idiomas, por ejemplo, estudiar en el extranjero a través de programas de intercambio, reconocimiento de créditos en universidades o centros de investigación extranjeros (Habilidades generales y específicas de lenguas extranjeras).

- Comprender y dominar los métodos matemáticos y numéricos de uso común (resolución de problemas y habilidades matemáticas).

1.1.1.2. Competencias genéricas

Tienen carácter transversal y deben darse bajo cualquier modalidad del nivel educativo. Evidentemente, este tipo de titulaciones son más propias de niveles educativos generales como la educación secundaria. En el caso de la universidad, las competencias generales se resumen a continuación en el proyecto de configuración mencionado anteriormente y en los libros blancos de las nuevas titulaciones de muchas universidades:

Instrumentales

Se corresponden con los medios para lograr un objetivo determinado:

- Habilidad analítica y sintética
- Organización y planificación
- Conocimientos generales
- Conocimientos básicos de la profesión

- Comunicación oral y escrita en su propio idioma (Bilingüe)

- Conocimientos básicos de informática

- Manejo de la información

- Resolución de Problemas

- Toma de Decisiones

Interpersonales

Incluyen las relaciones sociales y habilidades de integración:

- Habilidad crítica y autocrítica

- Trabajo en equipo

- Habilidades de comunicación interpersonal

- Habilidad para trabajar en un equipo interdisciplinario

- Habilidad para comunicarse con expertos en otros campos

- Apreciación de la diversidad y multiculturalidad
- Habilidad para trabajar en un contexto internacional

Sistémicas

Ayuda a comprender situaciones como sistemas complejos:

- Habilidad para aplicar el conocimiento en la práctica
- Habilidades de investigación
- Habilidad para aprender
- Habilidad para adaptarse a nuevas situaciones
- Habilidad para crear nuevas ideas (creatividad)
- Gestión
- Conocimiento de culturas y costumbres de otros países
- Capacidad para trabajar de forma independiente
- Planificación y gestión de proyectos

- Iniciativa y espíritu empresarial
- Preocupación por la calidad
- Motivación por el logro

1.2. Metodologías didácticas

Por supuesto, este concepto no requiere tanta explicación como el concepto de competencias, porque tiene una larga tradición en la educación. En términos muy generales, la "metodología didáctica" tiene muchos autores que entienden "método de enseñanza", es decir. todo lo que responde a la pregunta "¿Cómo enseñar?"

Por tanto, la metodología es “la actividad del profesor (y del alumno) en la enseñanza-aprendizaje”. Una definición tan amplia apoya el uso de términos como "metodología de enseñanza", "estrategias de enseñanza" o "técnicas de enseñanza" como sinónimos. Con mayor precisión conceptual, la metodología didáctica podría definirse como “las estrategias didácticas basadas en la ciencia que propone el docente en su aula para que los alumnos logren determinados aprendizajes” (es decir, la metodología didáctica define la “interacción didáctica” que tiene lugar en el aula).

Además, la "estrategia de enseñanza" es el patrón de intervención decidido por el maestro en el aula (esto puede incluir aspectos de la mediación del maestro, la organización del aula, el uso de recursos de aprendizaje, etc.). Asimismo, cada estrategia puede contener "tareas" (cada acción a realizar en un momento y situación particular), "procedimientos" (una secuencia de tareas) y/o "técnicas" (una secuencia organizada de tareas y/o procedimientos que lleva a tareas específicas). De acuerdo con este enfoque, "estrategia de enseñanza" se convierte en sinónimo de "metodología didáctica" si tiene una base científica comprobada. Esto significa:

A) La estrategia se desarrolla de manera disciplinada y minuciosa.

B) Está respaldado por investigaciones previas.

C) Que se formalice y distribuya.

En definitiva, se puede decir que la metodología didáctica es una forma de enseñar, si se hace de forma estratégica y científica o con eficacia comprobada. Finalmente, se especifica que tres términos están relacionados con la metodología didáctica, que muchas veces se utilizan incorrectamente como sinónimos:

- Estilo de enseñanza (es decir, la tendencia general del docente a planificar, implementar y evaluar la enseñanza-aprendizaje de una determinada manera, es decir, la tendencia personal de cada profesor a enseñar).

- Pedagogía (que es una ciencia que tiene por objeto el estudio de la educación y la enseñanza).

- Didáctica (que es la disciplina de la pedagogía aplicada en las actividades educativas).

1.3. Clasificación de metodologías didácticas

El estudio de las metodologías didácticas no ha demostrado que una metodología sea mejor que otra en cualquier situación de enseñanza-aprendizaje. La efectividad de la metodología depende de la interacción de varios factores:

- Resultados o metas de aprendizaje esperadas (metas simples vs. complejas, conocimientos vs. habilidades y/o actitudes, etc.).

- Características del estudiante (conocimientos previos, habilidades, motivación, aprendizaje, estilo, etc.).

- Características del profesor (estilo de enseñanza, personalidad), habilidades docentes, motivación, creencias, etc.).

- Características de la materia impartida (disciplina, complejidad, carácter más teórico o práctico, etc.).

- Condiciones físicas y materiales (número de alumnos, disposición del aula, disponibilidad de recursos, tiempo libre, etc.).

- Métodos basados en diferentes formas de representación.

- Métodos orientados a la discusión y/o trabajo en grupo (seminarios, estudios de casos, proyectos, aprendizaje colaborativo, etc.).

- Métodos basados en el aprendizaje individual o trabajo autónomo (contrato de aprendizaje, aprendizaje a distancia, aprendizaje programado, etc.).

Frente a un conjunto tan complejo de factores, la mayoría de los cuales son "incontrolables" o "inmutables", la investigación sobre métodos de enseñanza no ha logrado identificar el "método ideal". Sin embargo, se ha logrado tres conclusiones generales:

- Todos los métodos son equivalentes para lograr objetivos simples como obtener y comprender información.

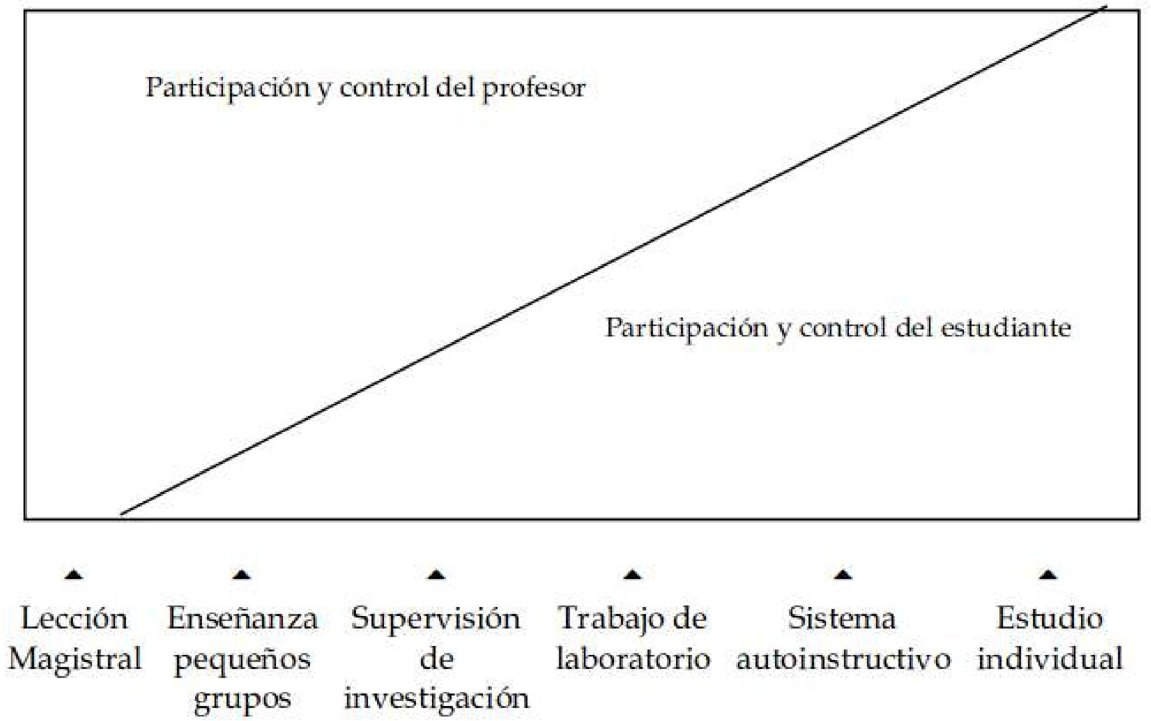
- Las metodologías más centradas en el estudiante son especialmente adecuadas para la memorización a largo plazo, el desarrollo del pensamiento, el desarrollo de la motivación y la consecución de objetivos relacionados con la transferencia o generalización del aprendizaje.

- La mayor eficacia de ciertas metodologías didácticas probablemente no provenga tanto de ellas como del volumen y calidad del trabajo mental personal del alumno que permiten producir.

Entonces, el mejor método es en realidad una combinación de métodos. Para elegir un método, primero se deben conocer sus ventajas y desventajas (conocimiento de la metodología), objetivos de aprendizaje claramente definidos (qué resultados de aprendizaje se logran con el método) y preparar correctamente las instrucciones de trabajo (analizar todos los factores que afectan el método).

Para clasificar las diferentes metodologías didácticas y analizar sus características, Brown y Atkins (1988) sugieren que las diferentes metodologías de enseñanza pueden ubicarse en un continuo: un extremo sería una clase magistral, donde la participación y el control de los estudiantes son mínimos. por otro lado, está la investigación individual o independiente, donde la participación y orientación del docente es mínima.

Figura 1. *Metodologías de enseñanza*



Fuente: Fortea Bagán (2019).

El propósito de estos métodos es simplemente "orientar", cada método tiene diferentes variaciones que pueden implicar una participación diferente tanto del profesor como del alumno. Por ejemplo, un “laboratorio” puede basarse en experimentos rutinarios totalmente definidos por el docente (como si fueran “recetas”) o, por el contrario, investigaciones guiadas donde el estudiante puede presentar hipótesis para ser contrastadas y planificar las pruebas a realizar.

Sin embargo, esta caracterización puede ser útil para ayudar al docente a aclarar sus intenciones con respecto a la participación de los estudiantes y la enseñanza. Suele combinarse o agruparse en dos tipos de metodologías basadas en la implicación del profesor y del alumno:

- **Tradicionales:** aquellas que se centran en el profesor, tratándose esencialmente de una "clase magistral".

- **Modernas:** métodos centrados en el profesor

Amparo Fernández (2006), amplía esta clasificación en tres categorías:

- Métodos basados en diferentes formas de representación.

- Métodos destinados a la discusión y/o trabajo en grupo (seminarios, estudios de casos, proyectos, aprendizaje colaborativo, etc.).

- Métodos basados en el aprendizaje individual o trabajo autónomo (contrato de aprendizaje, aprendizaje a distancia, aprendizaje programado, etc.).

Y en base a esta clasificación, el mismo autor propone varios criterios de selección de métodos de enseñanza para orientar a los docentes.

Tabla 1. *Métodos de enseñanza y criterios de selección*

CRITERIOS DE SELECCIÓN	METODOS DE ENSEÑANZA						
	Exposiciones (Lección magistral)		Discusiones o trabajo en grupo			Aprendizaje individual	
	Formales	Informales	Seminario	Estudio caso	Enseñanza por pares (Proy, ABP, Ap. Coop.)	Dirección de estudios	Trabajo individual Autónomo sin profes.
Niveles de los objetivos cognitivos	INF. (conocer y aplicar)	INF. (conocer y aplicar)	SUP. (analizar y evaluar)	SUP. (analizar y evaluar)	SUP. (analizar y evaluar)	SUP. (analizar y evaluar)	SUP. (analizar y evaluar)
Capacidad para propiciar un aprendizaje autónomo y continuado	DEBIL	DEBIL	MEDIANO	MEDIANO	ELEVADO	ELEVADO	ELEVADO
Grado de control ejercido por el estudiante	DEBIL	DEBIL	MEDIANO	ELEVADO	ELEVADO	ELEVADO	ELEVADO
Número de estudiantes que se puede abarcar	GRANDE (> 30)	GRANDE (> 30)	MEDIO (15-30)	MEDIO (15-30)	MEDIO (15-30)	PEQUEÑO (1-15)	GRANDE (> 30)
Número de horas de preparación, encuentros con estudiantes y de correcciones	MEDIO	MEDIO	PEQUEÑO	MEDIO	GRANDE	GRANDE	GRANDE

Fuente: Fernández (2006).

Otro sistema de clases muy interesante de metodologías didácticas adaptadas a los estudios de competencias universitarias es el de Mario De Miguel et al. (2006). Como único criterio utilizan la categoría organizacional de enseñanza-aprendizaje, es decir, los diversos escenarios en los que se desarrolla la enseñanza-aprendizaje, determinados por el grupo de estudiantes y organizadas si las actividades son presenciales o virtuales. A partir de estas situaciones de enseñanza-aprendizaje, se realiza un estudio en el que, previa consulta a varios expertos, se propone qué metodología es la más adecuada para la enseñanza-aprendizaje en cada formulario, y entonces, para qué sirven estos métodos (Tabla 2).

Tabla 2. *Metodologías para competencias*

MODALIDAD ORGANIZATIVA		**OBJETIVO**	**METODOLOGÍA**
PRE-SEN-CIAL	CLASE TEÓRICA	Hablar a los estudiantes	lección magistral
	SEMINARIO-TALLER	construir conocimiento con la interacción y la actividad	estudio de casos y resolución de problemas
	CLASES PRÁCTICAS	mostrar como actuar	resolución de problemas y ABP
	PRÁCTICAS EXTERNAS	lograr aprendizajes profesionales en contextos laborales	Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)
	TUTORÍA	atención personalizada	aprendizaje por proyectos y contrato de aprendizaje
NO PRE-SEN-CIAL	ESTUDIO Y TRABAJO EN GRUPO	que aprendan entre ellos	aprendizaje cooperativo y ABP
	ESTUDIO Y TRABAJO AUTONOMO INDIVID.	desarrollar capacidad de autoaprendizaje	aprendizaje por proyectos y contrato de aprendizaje

Fuente: De Miguel Díaz (2006).

Un tercer diagrama o taxonomía, que también puede resultar especialmente útil a la hora de elegir qué metodología didáctica emplearen un momento dado, es el modelo presentado por Miguel Ángel Zabalza (2011), que, utilizando el modelo de aprendizaje de Entwistle (1992), muestra cada enseñanza en cada momento o etapa de metodología por lo que atraviesan los estudiantes universitarios. Como se puede ver en la tabla 3, diferentes tipos de metodologías tienen su momento más adecuado y la mejor opción es una combinación de todas ellas, por ejemplo una clase magistral es ideal para la presentación de conocimientos (fase inicial del aprendizaje), trabajo en grupo (seminarios, casos, aprendizaje entre pares) es perfecto para corregir malentendidos y lagunas o consolidar el aprendizaje a través de la práctica y el trabajo independiente es la única metodología que permite una integración y un compromiso profundos. la culminación del aprendizaje.

Tabla 3. *Fases del proceso de aprendizaje*

FASES DEL PROCESO DE APRENDIZAJE (*Entwistle, 1992*)	Lección Magistral	Trabajo en equipo	Trabajo autónomo
1. Presentación de la información	+	- +	(+)
2. Recuperación de las lagunas o ideas erróneas en conocimientos previos	-	+	(- +)
3. Refuerzo de la comprensión	+	- +	(+)
4. Consolidación (a través de la práctica)	-	+	(- +)
5. Elaboración y reelaboración de la información	+	- +	(+)
6. Consolidación profunda y fijación del aprendizaje	-	-	+

Fuente: Zabalza (2011).

1.4. Metodologías para el desarrollo de competencias

La exploración detallada de cada metodología diferente está más allá del alcance de este capítulo. Nos limitamos aquí a una breve definición de las metodologías más importantes propuestas por De Miguel et al. (2006), por ser las más utilizadas actualmente en el aprendizaje por competencias en el sector universitario:

1.4.1. Lección Magistral

Método de presentación que consiste en presentar un tema lógicamente estructurado para obtener información organizada según criterios apropiados. Básicamente, el foco se encuentra en la exposición oral por parte del profesor del contenido de la materia estudiada. Su finalidad es transmitir información y activar procesos cognitivos en el alumno.

1.4.2. Ejercicios y resolución de problemas

Situaciones en las que el estudiante debe desarrollar e interpretar soluciones adecuadas para aplicar rutinas, fórmulas o procedimientos para transformar información proporcionada originalmente. Suele utilizarse para completar la clase magistral. Propósito: práctica de los conocimientos previos.

1.4.3. Aprendizaje basado en problemas (ABP) (Problem-Based Learning -PBL-)

Enseñanza-aprendizaje, cuyo punto de partida es un problema planteado por el profesor, en grupos de trabajo el alumno debe abordar los pasos de forma ordenada y coordinada y aprender lo que significa trabajar en torno a un problema o situación. El objetivo es desarrollar un aprendizaje activo a través de la resolución de problemas.

1.4.4. Estudios de casos (Case Studies) (Case Method)

Análisis intensivo y completo de un hecho, problema o hecho real con el fin de conocer, interpretar, resolver, generar hipótesis, contrastar información, reflexionar, completar, diagnosticar y, en ocasiones, formación sobre posibles métodos alternativos de solución. Objetivo: Aprender analizando casos reales o simulados.

1.4.5. Aprendizaje por proyectos (Learning by Projects) (Project Based Learning)

Método de enseñanza-aprendizaje en el cual los estudiantes completan un proyecto en un tiempo determinado para resolver un problema o manejar una tarea al planificar, diseñar e implementar una secuencia de actividades para desarrollar y aplicar este aprendizaje y el uso eficiente de los medios de uso. Objetivo: Implementación de un proyecto para resolver un problema aplicando las habilidades y conocimientos adquiridos.

1.4.6. Aprendizaje cooperativo

Un enfoque interactivo del trabajo en clase en el que los estudiantes son responsables de su propio aprendizaje y del de los demás en una estrategia de responsabilidad compartida para lograr las metas y motivaciones del grupo. Meta: Desarrollar un aprendizaje activo y relevante en colaboración.

1.4.7. Contrato didáctico o aprendizaje (Learning contract)

El estudiante y el profesor intercambian explícitamente opiniones, necesidades, proyectos y deciden juntos cómo se llevará a cabo la enseñanza-aprendizaje y se reflejará oralmente o por escrito. El profesor da unas tareas de aprendizaje, resultados y criterios de evaluación; y consulta con el estudiante sobre su plan de estudios. Propósito: desarrollo del aprendizaje autónomo.

Además de estas metodologías, nos gustaría destacar dos más, que no se tratan en la propuesta de De Miguel:

1.4.8. Seminario clásico

Si bien es un método organizativo, también es complementario. o seminario complementario, también es una lección alternativa a la lección magistral. Consiste en reuniones semanales entre un número de alumnos (10 o 15) y un experto y un profesor actuando como supervisor. El objetivo es familiarizarse y profundizar en un tema en particular. Consta de: conferencias (iniciales comunes dadas por el disertante e investigación extendida por parte del estudiante), redacción paso a paso de los textos bajo la supervisión del disertante y una discusión de seminario después de que los textos hayan sido leídos por todos los estudiantes. Esto podría entenderse como aprendizaje colaborativo.

1.4.9. Aprendizaje en el aula virtual

Habitualmente catalogado como un recurso o incluso como una forma de organización, que complementa la enseñanza presencial, pero que, debido a los desarrollos actuales, ya requiere de una metodología propia (con sistemas como WebQuest, wikis y redes colaborativas, etc.). Se define como una situación de enseñanza-aprendizaje donde se utiliza una computadora en línea como sistema de comunicación entre el maestro y el estudiante y se prepara un plan de estudios integrado al plan de estudios. Ya existen varios "entornos" pensados no sólo para "publicar" conocimientos, sino también para facilitar el aprendizaje constructivo del alumno.

Capítulo 2

Tecnologías y pensamiento lógico matemático

En las últimas década, la sociedad de la información se ha desarrollado rápidamente, lo que ha favorecido el surgimiento de herramientas técnicas que han influido en diversos aspectos de la sociedad humana, entre los que se puede destacar el nivel de educación, especialmente en las universidades. Estos avances tecnológicos han obligado a los estudiantes a adoptaren los y depender de máquinas y dispositivos con tecnología actualizada para ser competitivos en el aula y luego en el exigente mercado laboral, dependencia que sin duda es un factor que afecta la educación, debido a que influyen en las personas al momento de formular, enfrentar y resolver problemas relacionados con cualquier ciencia y en especial con las matemáticas.

El sistema educativo, como parte importante de la sociedad humana, no puede ignorar tal situación, porque privaría a los estudiantes de la oportunidad y el derecho a desempeñarse efectivamente sus ámbitos de acción, coartando los verdaderos y grandes postulados de la educación y la misión de las instituciones educativas en todos sus niveles. Existe una relación innegable entre la tecnología y el desarrollo del pensamiento lógico matemático que afecta a los estudiantes, que debe ser estudiada y analizada técnicamente para crear estrategias y procedimientos pedagógicos que permitan armonizar el uso de las herramientas. tecnologías y programas informáticos que mejoran continuamente las habilidades y destrezas de los estudiantes para resolver situaciones de problemas numéricos que sin duda forman parte de los acontecimientos que encuentran en su vida diaria o profesional.

En este capítulo se analiza el desarrollo tecnológico que ha mostrado la sociedad y sus efectos en el desarrollo del pensamiento lógico matemático de los estudiantes avanzados, con el fin de constatar la importancia del uso de herramientas técnicas en la formulación y resolución de tareas matemáticas que requieran razonamiento lógico.

2.1. Tecnología

La tecnología es un conjunto de información técnica y científicamente organizada que permite el diseño y la creación de bienes y servicios que facilitan la adaptación al medio ambiente y satisfacen tanto las necesidades como los deseos esenciales de la humanidad. Es una palabra de origen griego, formada por téchnē (arte, técnica o negocio, que puede traducirse como habilidad) y logia (el estudio de algo). Aunque existen muchas tecnologías, es común que la expresión se utilice en singular para referirse a una o todas ellas.

La tecnología puede indicar tanto una disciplina teórica que estudia conocimientos comunes a todas las tecnologías, como una rama de la educación dedicada a la formación tecnológica y familiarización con las tecnologías más importantes; Asimismo, se piensa y entiende la tecnología como dispositivos utilizados en los procesos de enseñanza y aprendizaje para comprender y resolver problemas matemáticos con el fin de identificar la relación entre el uso de estos dispositivos y el pensamiento lógico matemático. El estudiante debe desarrollar una base para la resolución de tareas numéricas relacionadas con la carrera profesional elegida y el posterior desempeño laboral profesional.

La tecnología debe analizarse desde dos perspectivas relacionadas con el tiempo. Así, en la prehistoria las tecnologías se utilizaron para satisfacer necesidades esenciales (alimentación, vestido, vivienda, protección personal, relaciones sociales, comprensión del mundo natural y social) y en la historia también para satisfacer placeres físicos y estéticos (deporte, música, hedonismo) y como forma de satisfacer deseos (simbolizar estatus, mejorar procesos, etc.).

Un caso especial es el papel de la tecnología en la formación de los futuros profesionales, donde para lograr un trabajo efectivo es necesario aprender y dominar el uso de la tecnología informática a tal punto que en la mayoría de los casos se percibe una excesiva dependencia de herramientas tecnológicas. En la actualidad es imposible pensar en un profesional realizando un trabajo eficaz si no tiene conocimiento del manejo e implementación de programas y dispositivos técnicos que mejoren los procesos de realización de las tareas asignadas.

A pesar de lo anterior, es importante considerar el nivel de tecnología que deben utilizar los estudiantes para que el desarrollo del pensamiento lógico matemático no se vea afectado y se vuelvan demasiado dependiente de esta debido a la facilidad de uso de la computadora, llegándose a los extremos de emplear la tecnología incluso para realizar operaciones básicas de multiplicación. La situación empeora debido a la fe superior de los estudiantes en los resultados obtenidos por las máquinas. Generalmente, el estudiante no realiza comprobación alguna de los resultados de las operaciones que realiza durante el proceso, porque mantienen una fe indiscutible en las herramientas tecnológicas.

Es importante subrayar que la tecnología mantiene ciertas funciones específicas, entre las que distingue la función simbólica de los objetos técnicos. Tal situación surge cuando la tarea principal de los objetos técnicos no es satisfacer las necesidades básicas de las personas, sino que se convierten en un medio para crear estatus social y relaciones de poder. Para los estudiantes este fenómeno se repite y se manifiesta en su preferencia por adquirir equipos técnicos como teléfonos móviles de alta tecnología y de precios muy elevados para completar sus estudios. La mayoría de los estudiantes tienen teléfonos móviles caros, aunque no tienen computadora ni calculadora científica para usar en sus estudios, lo que sugiere que la función simbólica de la tecnología excede a la de su aplicación técnica.

Estudios realizados demostraron que 52 de cada 60 estudiantes de administración poseen un celular de alta tecnología que cuesta entre $200 y $700 y no tenían equipo informático para estudiar ni calculadora científica para realizar los cálculos numéricos. Aquí surge la siguiente pregunta ¿cuál es la motivación de exponer información relacionada con la posesión de equipos tecnológicos? El análisis realizado ayuda a comprender la lógica del pensamiento de los estudiantes en canto al uso de recursos técnicos para su propio uso, situación que en última instancia y se ve condicionada por los medios de comunicación masiva, la subcultura consumista y la publicidad, situación que se transforma en un problema para la enseñanza y afecta directamente el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje. Las valoraciones antes mencionadas no pretenden demostrar que las tecnologías sean la causa de la incapacidad de los estudiantes para concentrarse en la enseñanza-aprendizaje, pero confirman el supuesto de su prevalencia.

2.2. Educación y tecnología

Los métodos varían según se trate de tecnologías para la producción artesanal o industrial de objetos, la prestación de servicios, la ejecución u organización de determinadas tareas, lo que puede influir en la clasificación de la tecnología aplicada en función de su complejidad. Esta consideración es relevante en el contexto de educación superior o universitaria, puesto que es innegable que muchas universidades no cuentan con las tecnologías acordes para la formación de especialistas en diversas áreas, lo que aparentemente crea un conflicto externo entre las exigencias del mercado laboral y la formación de destrezas en el manejo de herramientas tecnológicas por parte de los profesionales.

La falta de destreza en el manejo de equipos técnicos en las futuras tareas laborales es una situación problema actual que afecta a muchos estudiantes que no cuentan con equipos informáticos debido a su condición socioeconómica. Bermúdez Tacunga (2014), como parte de un trabajo de investigación, visitó los hogares de 60 estudiantes, encontrando que 18 de ellos no contaban con computadoras, presentando más deficiencias en el manejo de este tipo de equipos técnicos. Sin embargo, demostraron un mayor nivel de razonamiento lógico que aquellos que poseían una computador en casa, como lo demostraron los puntajes más altos obtenidos en las pruebas de razonamiento numérico a las que fueron sometidos todos los estudiantes.

Un método común a todas las tecnologías de producción es el uso de herramientas e instrumentos para construir artefactos, lo que inevitablemente crea situaciones problemáticas que requieren de los profesionales con educación universitaria el empleo de habilidades numéricas y lógicas. Las tecnologías en las áreas de prestación de servicios públicos, requieren de instalaciones complejas gestionadas por personal especializado, y modernas maquinarias que resultan de combinaciones complejas de diferentes herramientas controladas (ahora muchas por computadoras) con información de dispositivos conectados a ellas.

Se sabe que existe una importante relación entre el pensamiento lógico, la resolución de problemas y la invención de objetos; la unión armoniosa de éstas debe ser una de las metas principales de la formación técnico humanista de los estudiantes. La creación de medios técnicos para mejorar el desarrollo socioeconómico del entorno debe convertirse en un objetivo que se alcance mediante la promoción del razonamiento lógico. Como se ha demostrado, el razonamiento lógico matemático mantiene una alta correlación positiva con la creatividad humana y por ende con la velocidad de inventar nuevos objetos o cosas que luego satisfacen las necesidades cotidianas.

Según el científico I. Asimov (1958), la invención necesita trabajo duro y pensamiento fuerte. J. P. Guilford (1958), destacado investigador en psicología de la inteligencia define las habilidades básicas del inventor como las diversas habilidades de producción. Guilford propone un modelo de análisis factorial de la inteligencia que tiene tres dimensiones:

1. **Proceso intelectual:**

   La actividad que realiza una persona para transformar la información en conocimiento.

2. **Producto intelectual:**

Formar u organizar la información por orden de complejidad.

3. **Contenido de la información.**

El modelo de inteligencia, es un modelo integral que considera tanto la inteligencia como el conocimiento para definir aún más el concepto de capacidad intelectual, que es el resultado de una combinación de proceso, producto y contenido del conocimiento. Gracias a este modelo es posible obtener aplicaciones para medir y desarrollar habilidades intelectuales como herramientas básicas de aprendizaje.

Su punto de partida es el análisis del funcionamiento del sistema cognitivo en la resolución de problemas. Para ello, establece tres categorías:

- **Operaciones:**

  Tipo de proceso intelectual (evaluación, producción convergente, producción divergente, retención de memoria, registro de memoria, cognición).

- **Contenido:**

  Tipo de conocimiento a trabajar (visual, auditivo, simbólico, semántico, conductual).

- **Productos:**

  La forma que toma la información.

2.3. Tipos de tecnologías

El pensamiento lógico matemático es una habilidad que facilita el desarrollo tecnológico y puede ser considerada tecnología dura o blanda dependiendo del campo de aplicación del que provenga. El término tecnología suele utilizarse para tecnologías de la información, microelectrónica, láseres o funciones especiales, tecnologías que se consideran duras y son reconocidas por las ciencias que la estructuran. La sociedad generalmente reconoce como tecnologías duras aquellas derivadas de ciencias como la física, la química y la informática, pero la mayoría de las definiciones conocidas permiten e incluyen otras a menudo denominadas blandas.

Las tecnologías blandas, donde su producto no es un objeto tangible, como los servicios, tienen como propósito mejorar el desempeño de las organizaciones para lograr sus objetivos, que pueden ser empresas industriales, comerciales o de servicios, organizaciones con o sin fines de lucro, instituciones públicas o privadas, etc. La educación (en el sentido del proceso de aprendizaje) se distingue claramente de las denominadas ramas blandas de la ingeniería, porque a través de la enseñanza-aprendizaje se forman personas con conocimientos técnicos que les permiten crear bienes o servicios para satisfacer las necesidades del entorno social.

Este tipo de organización tecnológica también se ocupa de la gestión, la contabilidad y las operaciones, la logística de producción, el marketing, las estadísticas, las relaciones humanas y la psicología del trabajo, y el desarrollo de software informático. En general, las tecnologías blandas se basan en ciencias blandas como la sociología, la pedagogía, la economía o la gestión. Existen otras clasificaciones tecnológicas que son ampliamente reconocidas en la sociedad, entre las que se enumeran las denominadas tecnologías apropiadas (Appropriate Technology).

La tecnología se considera apropiada si tiene un impacto positivo en las personas y el medio ambiente. Si bien este tema es actualmente muy debatido, existe un consenso bastante amplio y decidido entre los miembros de la sociedad acerca de las principales características que debe tener una tecnología para ser social y ecológicamente apropiada:

- No causar daños a las personas o daños innecesarios a otras formas de vida (animales y plantas).

- No dañar el patrimonio natural de las generaciones.

- Mejorar las condiciones básicas de vida de todas las personas, independientemente de su poder adquisitivo.

- Respetar los derechos y elecciones de sus usuarios voluntarios y sus propósitos desconocidos.

- No causar efectos irreversibles, aunque a primera vista parezcan beneficiosos o neutrales.

Los conceptos de tecnologías relevantes y tecnologías de vanguardia son completamente diferentes. Las tecnologías avanzadas, un término publicitario que enfatiza la innovación, suelen ser tecnologías complejas que utilizan muchas otras tecnologías más simples y se encuentran en bienes y servicios que se aplican en situaciones nuevas y mejoradas en relación con sus respectivos mercados. Para ampliar el tema, es necesario agregar argumentos sobre el pensamiento lógico y revelar los aportes de los teóricos al tema, que sin duda son referencias científicas importantes que deben ser vistas desde una mejor perspectiva. en apoyo de la presentación de los criterios.

2.4. Pensamiento lógico

Cuando se asume el concepto de pensamiento lógico, se debe considerar que pensar es un acto que hace que el cerebro humano funcione de tal manera que pueda percibir, imaginar, analizar o comparar abstractamente el mundo que lo rodea, o generar fantasías. El pensamiento lógico puede y debe desarrollarse desde la etapa de enseñanza-aprendizaje, siendo un requisito previo importante para la vida laboral exitosa de un estudiante de posgrado, porque una profesión efectiva no puede nacer sin una mente creativa y un desarrollo lógico. Los profesionales tienen que enfrentarse a situaciones problemáticas cotidianas y tomar decisiones que afectan a la organización en la que trabajan.

Desarrollar el pensamiento lógico requiere práctica constante, las personas no nacen con una mente lógica; practicar el pensamiento lógico, especialmente en matemáticas, requiere concentración y compromiso, por lo que no se recomienda el uso de herramientas técnicas, que generalmente se consideran herramientas pedagógicas adicionales, durante esta etapa de "gimnasia mental" que deben realizar los estudiantes. El ejercicio del pensamiento lógico matemático de los estudiantes se puede realizar con un sistema de tareas profesionales que mantienen un aumento en la complejidad e incluyen situaciones problema que los estudiantes pueden resolver sin operaciones aritméticas o algebraicas que requieren fundamentos matemáticos significativos para su solución.

Cabe recalcar que una de las manifestaciones del pensamiento lógico es la capacidad abstracta de un individuo. El Dr. Miguel Palacios Frugone cree que los niños solo tienen pensamientos concretos: entienden lo que ven, entonces, por ejemplo, para entender que dos más dos son cuatro, hay que mostrarles dos objetos y luego agregar dos más ante sus ojos. En el caso de los estudiantes, ya tienen un nivel de abstracción que les permite comprender las situaciones que viven día a día y sacar conclusiones de ellas, lo que sin duda varía entre estudiantes, debido a los diferentes niveles de subjetividad de los que provienen y de los diversos entornos sociales en los que interaccionan.

El pensamiento lógico es necesario para resolver problemas cotidianos y hacer avanzar la ciencia, porque significa sacar conclusiones de las premisas contenidas en ellos, pero no de las directamente observables. La lógica es una ciencia universal y formal que ayuda a llevar a cabo un razonamiento válido porque estudia las formas del pensamiento independientemente de su contenido.

Esto se debe a que el objetivo del pensamiento lógico es llegar a una conclusión válida en base a una determinada suposición, analizar, comparar, luego sintetizar partes separadas para el análisis, justificar las conclusiones obtenidas, porque no son productos de la invención, sino que surgen de las afirmaciones que ajustan a un proceso de prueba. Para lograr el pensamiento lógico, se debe partir de proposiciones para construir otras que se deriven correctamente, independientemente de su verdad. El propósito de estos argumentos es la prueba, que se logra a través del razonamiento.

Si decimos en el lenguaje cotidiano que algo es lógico, porque nos parece una conclusión razonable de lo anterior, entonces el propósito de las tareas profesionales es desarrollar en los estudiantes habilidades que les permitan resolver problemas matemáticos, problemas de manera lógica y deductiva, incluso si requieren la aplicación de algoritmos complejos o usar dispositivos técnicos como computadoras o calculadoras.

Según A. Rincón (1979), el pensamiento lógico matemático se entiende como un conjunto de habilidades que todo individuo debe tener para resolver determinadas funciones básicas, analizar información, utilizar el pensamiento reflexivo y el conocimiento del mundo que le rodea, y aplicarlos a sus vidas todos los días.

2.5. Resolución de problemas

La resolución de problemas supone un proceso mental que requiere la finalización de un proceso más amplio que está precedido por la identificación y el modelado del problema. Un problema se entiende como algo para lo que se espera una solución, que no es tan obvia según el enfoque original.

Considerada la más compleja de todas las actividades intelectuales, la resolución de problemas se ha definido como un proceso cognitivo de alto nivel que requiere que los estudiantes modulen y dominen habilidades rutinarias o básicas. La resolución de problemas se da principalmente en dos áreas que suelen tener una correlación significativa debido a su singularidad inherente: la resolución de problemas matemáticos y la resolución de problemas personales (donde existe algún obstáculo para resolverlos).

La resolución de problemas matemáticos se considera la parte más importante de la enseñanza de las matemáticas. Al resolver problemas, los estudiantes experimentan el poder y la utilidad de las matemáticas en el mundo que los rodea. Para los estudiantes, los problemas matemáticos que resuelvan deben ser compatibles con el entorno de trabajo de cada asignatura, de modo que no debiliten o afecten la comprensión de la lógica y la practicidad que se espera en relación con la profesión para la que se forman.

Desde la época de George Pólya (1945) hasta la actualidad, muchos docentes e investigadores se han dedicado a encontrar respuestas a las dificultades de los estudiantes para resolver problemas matemáticos, que son una alegría para muchos y una pesadilla para otros. Lo cierto es que las personas no siempre pueden enfrentarlos, por lo que se deben desarrollar habilidades para esto. El desarrollo de las tecnologías de procesamiento de la información destaca la capacidad de utilizarla, si se piensa en su uso en la resolución de problemas, pero también cuando se utiliza adecuadamente, promueve la asimilación de la información, considerando las posibilidades que la obtención de la información. proporciona.

Sin embargo, el mercado laboral actual valora más el uso efectivo de herramientas técnicas que el conocimiento teórico de la ciencia; Las empresas prefieren contratar personas con alta habilidad en la resolución de problemas laborales, dejando atrás a personas con altos conocimientos científicos. Es por ello que la capacidad de resolución de problemas se ha convertido en el foco de la educación matemática en la época actual, por ello es importante valorar la educación que anteponga la capacidad de resolución de problemas al desarrollo del pensamiento lógico.

A partir de estas ideas centrales se debe determinar el contenido del estudio, por lo que en este sentido y en el marco de la formación universitaria, es conveniente buscar el pensamiento lógico matemático a través del desarrollo e implementación de un sistema de tareas profesionales. Hay varias definiciones de problemas en la bibliografía sobre resolución de problemas, cada una de las cuales representa una perspectiva diferente, aunque conceptualmente diferente, pero que presenta elementos comunes o al menos no contradictorios.

En general, todos coinciden en que el problema es una situación difícil para la que no existe una solución inmediata. Este aseveración es muy importante desde el punto de vista de la didáctica, ya que al elegir las tareas a presentar al grupo de estudiantes, se debe considerar no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que las personas necesitan para resolverla. Otro aspecto fundamental a considerar es que la persona tenga un fuerte deseo de hacer cambios que le ayuden a solucionar el problema, lo que quiere decir que si no está motivada, la situación en cuestión deja de ser un problema porque no siente ganas de solucionarlo. En resumen, hay al menos dos condiciones necesarias para resolver un problema: el camino debe ser desconocido y la persona quiere resolver el problema.

Para motivar a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento lógico matemático, los profesores universitarios pueden emplear varias estrategias, por ejemplo:

- el papel de la resolución de problemas matemáticos en situaciones de la vida,
- el papel de las matemáticas en general y
- la resolución de problemas, especialmente en el desarrollo de las matemáticas como función desarrolladora de la historia y los problemas de la ciencia y su contribución al desarrollo intelectual del futuro profesional y en especial a la formación de su pensamiento.

Las motivaciones en esta área se denominan motivaciones matemáticas. Para ser verdaderamente interesantes, los problemas deben representar situaciones actuales y ambientales, adaptarse estrictamente a la realidad, no requerir dispositivos técnicos para resolverlos y ser accesibles a los estudiantes sin perderlos de vista, en vista que las dificultades implicadas deben incrementarse periódicamente con el fin de una formación progresiva en el pensamiento lógico matemático, que se pretende desarrollar en los alumnos como función fundamental del desempeño laboral posterior.

En conclusión, se tiene lo siguiente:

- El desarrollo del pensamiento lógico, la resolución de problemas matemáticos y la invención de herramientas técnicas son directamente proporcionales y están positivamente relacionados.
- Los estudiantes que tienen fácil acceso a las herramientas tecnológicas educativas muestran una mayor dependencia en la

resolución de problemas matemáticos, lo que dificulta el desarrollo de sus habilidades de pensamiento lógico.

- Los estudiantes que muestran dificultad para dominar las herramientas técnicas presentan mayores habilidades de razonamiento lógico durante las pruebas de resolución de problemas.

- La motivación es importante para el desarrollo de la resolución de problemas por parte de los estudiantes.

- Los estudiantes deben practicar el pensamiento lógico matemático a través de un sistema de problemas de aspecto profesional que permita resolver problemas con o sin ayudas técnicas.

Capítulo 3

Método Pólya para la resolución de problemas

George Pólya nació en 1887 en Hungría. Recibió su doctorado de la Universidad de Budapest, y para lograr este título trabajó en cálculo de probabilidades. Fue profesor en el Instituto Federal de Tecnología de Zúrich, Suiza. En 1940, Pólya y su esposa suiza se mudaron a los Estados Unidos después de huir de Hitler. Además de húngaro, alemán, francés e inglés, Pólya hablaba (bastante mal, según ella) y podía leer y comprender más. Se establecieron en Palo Alto, California, consiguieron trabajo en la Universidad de Brown y en 1942 se trasladaron a la Universidad de Stanford.

Durante su larga vida académica y profesional, recibió varios premios y reconocimientos por su destacada labor en educación, matemáticas y sus importantes investigaciones. Cuando se le preguntó cómo llegó a ser matemático, respondió medio en broma, medio en serio: No era lo suficientemente inteligente para ser físico y demasiado inteligente para ser filósofo, así que elegí las matemáticas, algo intermedio.

Las contribuciones de Pólya incluyen más de 250 artículos matemáticos y tres libros que promueven acercamientos al conocimiento y el desarrollo de estrategias de resolución de problemas. Su famoso libro Cómo configurar y resolver problemas, que ha sido traducido a 15 idiomas, presenta su método de cuatro pasos, así como heurísticas y estrategias específicas para resolver problemas.

Otras obras importantes de Pólya incluyen Descubrimiento matemático (I y II) y Matemáticas y razonamiento plausible (I y II).

En el libro “Planteamiento y resolución de problemas”, Pólya ofrece heurísticas generales para resolver todo tipo de problemas, no solo matemáticos. El libro incluye consejos para la enseñanza de las matemáticas y una mini-enciclopedia de términos heurísticos. Ha sido traducido a muchos idiomas y vendió más de un millón de copias. El físico ruso Zhores I. Alfjorov (Premio Nobel de Física 2000) lo elogió y dijo que estaba satisfecho con el famoso libro de Pólya.

En la obra "Matemáticas y razonamiento plausible", en la parte I establece reglas generales a través de razonamientos lógicos, incluyendo también un capítulo sobre una técnica llamada inducción matemática, pero ese no es el tema principal. En la parte II, analiza formas más generales de lógica inductiva que se pueden usar para aproximar la probabilidad (especialmente matemática) de una condición.

Este matemático enriqueció las matemáticas con un importante legado en la enseñanza de estrategias de resolución de problemas. En resumen, dejó los siguientes diez mandamientos a los profesores de matemáticas:

- Interésate por tu materia.

- Conoce tus cosas.

- Trata de leer las caras de tus alumnos, tratar de entender sus expectativas y dificultades, ponte en sus zapatos.

- Date cuenta de que la mejor manera de aprender algo es descubrirlo por ti mismo.

- Dar a los alumnos, además de información, el conocimiento de cómo hacerlo, promover actitudes mentales y el hábito del trabajo metódico.

- Enseñarles a hacer conjeturas.

- Deben aprender a repasar.

- Tenga en cuenta que las características de un problema dado pueden ser útiles para resolver problemas futuros: intente identificar el patrón general que subyace en la situación particular actual.

- No reveles todo el secreto abruptamente: deja que tus alumnos conjeturen primero; déjelos descubrir tanto como sea posible por sí mismos.

- Darle sugerencias; no obligarlos.

3.1. Método para la resolución de problemas

La resolución de problemas ha cobrado fuerza en el campo científico, debido a que es importante en la formación de habilidades necesarias para la vida, por ello diversas investigaciones internacionales enfatizan su valor y la necesidad para el desarrollo de esta competencia. Las matemáticas deben ser enseñadas en el desarrollo de las competencias, porque les permite a los estudiantes adquirir las habilidades necesarias para resolver problemas, tales como:

- analizar datos,

- encontrar información importante,

- hacer un plan,

- aplicar correctamente los algoritmos y

- comparar resultados.

La resolución de problemas juega un papel importante en la adquisición de habilidades de interpretación que los estudiantes necesitan desarrollar no solo en el contexto educacional, sino también para enfrentar situaciones problemáticas cotidianas. Además, es importante resaltar que las habilidades y destrezas que desarrollan los estudiantes cuando aprenden a resolver problemas también pueden ser aplicadas a otras áreas o situaciones, pudiéndose decir que la resolución de problemas ocupa un lugar central en la formación académica, porque estimula la capacidad de crear, inventar, razonar y analizar situaciones para resolverlas. En base a lo anterior, se considera útil plantear en clase, problemas contextuales que requieran un análisis detallado y permitan al estudiante elegir una estrategia a seguir para llegar a la solución.

Pólya al hacer referencia a la resolución de problemas, establece:

> Los descubrimientos resuelven problemas, pero al establecer la solución de cualquier problema, existe un cierto descubrimiento. El problema planteado puede ser modesto; pero, al poner a prueba la curiosidad pone en juego las facultades inventivas, al resolverlo por medios propios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo.

Con la implementación del método Pólya no solamente se pretende que el estudiante encuentre la solución del problema planteado luego de seguir una serie de pasos o procedimientos, sino que también haga uso de los conocimientos y habilidades de pensamiento que necesita para el desarrollo de competencias en la resolución de problemas. Seguidamente se relacionan los cuatro pasos de este método descritos en el libro “Cómo plantear y resolver problemas”.

3.1.1. Entender el problema

Este primer paso es muy importante, puesto que resulta muy difícil, resolver el problema si no se entiende el enunciado. El estudiante debe comprender claramente lo que se les pide antes de ofrecer una solución. A este propósito puede ser útiles cuestionamientos como:

- ¿Cuáles son las incógnitas para encontrar?
- ¿De cuáles datos se dispone?
- ¿Se dispone de suficiente información?
- ¿Cuál es la condición?
- ¿La condición es suficiente para definir la incógnita?
- ¿Resulta la condición insuficiente?
- ¿existe información extraña?
- ¿Resulta redundante?
- ¿Es controversial?
- ¿Se comprende el planteamiento del problema?

- ¿Es posible replantear el problema de una forma más sencilla?

- ¿El problema resulta similar a algún otro problema ya resuelto?

En este primer paso, es imprescindible identificar si el problema tiene los datos necesarios para resolverlo o si por el contrario falta alguna información.

3.1.2. Configuración del plan

En esta etapa el estudiante hace uso de su conocimiento, imaginación y creatividad para desarrollar una estrategia que le permita desarrolla las estrategias o acciones necesarias para solucionar el problema; es importante utilizar aquellos problemas que no tienen una solución única. El docente puede guiar a los estudiantes a través del proceso. En esta etapa, es importante explicar a los estudiantes cómo desarrollar las siguientes estrategias para que puedan usarlas cuando sea necesario:

- Ensayo y error (Conjeturar y probar la conjetura)

- Resolver un problema similar más simple

- Hacer un diagrama

- Hacer una lista

- Planteamiento de una variable

- Encontrar un Patrón
- Hacer una figura
- Realizar un diagrama
- Emplear razonamiento directo
- Uso de razonamiento indirecto
- Emplear las propiedades de los Números
- Trabajar hacia atrás
- Uso de casos
- Resolución de una ecuación
- Empleo de una fórmula
- Usa de un modelo
- Empleo de análisis dimensional
- Identificación de sub-metas

- Uso de coordenadas

- Uso de simetría.

3.1.3 Ejecución del plan

En este paso, el estudiante debe aplicar la estrategia o estrategias elegidas para resolver completamente el problema. Se recomienda reservar un tiempo razonable para implementar el plan; si no se logra el éxito, el problema debe dejarse de lado y seguir con otro, solo para volver a él más tarde. El docente puede guiar el proceso con preguntas: ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes probarlo?

3.1.4. Mirar hacia atrás

El último paso es muy importante porque le brinda al estudiante la oportunidad de revisar su trabajo y asegurarse de que no cometer algún error; Esto puede basarse en las siguientes preguntas:

- ¿Es correcta su solución?

- ¿Responde la respuesta al problema?

- ¿Puede extenderse la solución a un caso general?

> Cuando los estudiantes utilizan consciente y cuidadosamente todos los pasos anteriores para resolver problemas, aprenden a planificar e implementar estrategias que permitan el éxito.

3.2. Estrategias educativas

Considerando que este capítulo se analiza el método de Pólya como estrategia pedagógica, es necesario explicar su significado en el contexto de esta obra, considerando la definición de Castro y Quiñones (2008):

> Por estrategias educativas se entienden aquellas actividades que emplea el docente con el objetivo de facilitar la formación y el aprendizaje de diversas disciplinas en los estudiantes. Para que no se limite a simples técnicas o guiones, deben estar sustentadas en una rica preparación teórica de los docentes, porque en la teoría se encuentra la creatividad necesaria en el complejo proceso de enseñanza-aprendizaje.

Si el docente tiene una buena preparación teórica, tiene las herramientas necesarias para implementar diversas estrategias; esto, sumado a la imaginación y la creatividad, permite que las actividades y sugerencias sean significativas para los estudiantes y contribuyan a sus procesos de aprendizaje.

3.3. El aprendizaje significativo

El aprendizaje significativo ve en el estudiante a un procesador activo de información, el aprendizaje es sistemático y organizado porque es un fenómeno complejo que no se limita a simples recuerdos asociativos. La resolución de problemas requiere procesos sistemáticos y organizados por parte del estudiante, quien puede encontrar en el método propuesto de Pólya un medio para promover estrategias de aprendizaje, ponerlas en práctica y evaluar su importancia sin el empleo de simples asociaciones memorísticas.

El aprendizaje significativo conduce a la creación de nuevas estructuras de conocimiento a través de la conexión material entre el nuevo conocimiento y los pensamientos previos de los estudiantes. Pero ¿qué procesos y estructuras se aplican para lograr un aprendizaje significativo? Según Ausubel, se producen cambios importantes en la estructura de nuestro conocimiento como resultado de la asimilación de nueva información; pero esto es posible sólo bajo ciertas condiciones favorables. La resolución de los problemas requiere conocimientos previos de los estudiantes, y también procesos que modifican las estructuras existentes, que favorecen la asimilación de nuevos conocimientos y la generación de conocimientos.

Las condiciones favorables para lograr un aprendizaje significativo están relacionadas con los nuevos conocimientos, los cuales deben estar relacionados con los conocimientos previos del alumno, la motivación para el aprendizaje y los materiales preparados para el aprendizaje por parte del docente. Para que el aprendizaje se considere verdaderamente importante, debe cumplir varias condiciones: el nuevo conocimiento debe ser no arbitrario y estar esencialmente relacionado con lo que el estudiante ya sabe, dependiendo de la capacidad de aprendizaje de este último (motivación y actitud) y también de la naturaleza del material de aprendizaje o contenido de aprendizaje. Es muy difícil que los alumnos obtengan aprendizajes importantes si el docente no está comprometido con su trabajo, superación y formación. Además de dominar su disciplina, debe tener motivación, capacidad para planificar, estructurar y planificar sus actividades docentes.

El método de resolución de problemas de George Pólya demuestra adaptarse a las necesidades de los estudiantes, ya que su estructura de cuatro pasos les permite descubrir que las herramientas proporcionadas favorecen el desarrollo de habilidades y competencias para encontrar significado y utilidad en sus actividades. La creación de una guía didáctica de problemas basada en el método de George Pólya resulta una herramienta útil para analizar cuidadosamente los diferentes elementos de un problema, planificar e implementar diferentes estrategias para encontrar una solución.

Al agregar el método de Pólya a su rutina de trabajo, los estudiantes pueden resolver problemas matemáticos básicos de manera estructurada. Asimismo, los docentes deben estar en un proceso continuo de formación y actualización para que sus prácticas pedagógicas se enriquezcan constantemente. Finalmente, es importante que la institución educativa abra espacios para que los docentes comuniquen y compartan este tipo de experiencias importantes con sus pares, y apliquen guías didácticas, adaptadas a las necesidades específicas de cada grupo de estudiantes.

Capítulo 4

Ejemplo de aplicación de método Pólya en la resolución de un problema

En este capítulo se hace el registro de una experiencia de búsqueda y construcción de conocimiento a partir de un problema, por parte de los estudiantes de un curso de sistemas dinámicos lineales, estos resultados de la metodología de la enseñanza-aprendizaje pueden ser transferidos a otras áreas de formación académica universitaria. El área de investigación fue el conjunto de actitudes y capacidades demostradas por los alumnos de un curso de álgebra lineal preparatorio a un curso de teoría de control en la carrera de ingeniería de sistemas. Se trabajó el álgebra lineal con un enfoque geométrico y se utilizó la herramienta computacional para realizar sucesivas pruebas que llevaron al descubrimiento de propiedades

¿Cuál es el objetivo?

Valorar la herramienta informática de acuerdo con su velocidad de respuesta en el proceso de recopilación de información y realización de operaciones que no se pueden realizar manualmente porque la operación matricial requeriría tiempo y esfuerzo. Con base en las observaciones, se hicieron nuevamente preguntas más específicas, que definieron y diferenciaron las hipótesis para un nuevo ciclo más profundo de investigación-acción con hipótesis específicas.

¿Herramienta computacional elegida y por qué?

Se empleó el paquete de programas Scilab (Basile) desarrollado por el grupo META2 en el Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) de Francia. El objetivo del sistema es proporcionar a los expertos en matemática aplicada de una robusta herramienta de cálculo matricial. El paquete Scilab es de distribución gratuita por el INRIA, considerado un paquete de software científico para cálculo numérico en un entorno amigable.

Entre sus características se encuentran:

- Estructuración de datos elaborados (matriz polinomial, racional y de caracteres, listas, sistemas multivariables lineales).

- Interpretación y lenguaje de programación de forma parecida al Matlab.

- Presencia de graficación en dos y tres dimensiones. Animación.

- Estructuración abierta (interfaz con Fortran y C vía online con linkeado dinámico).

- Posee bibliotecas de macros.

- Presencia de álgebra lineal (incluye matrices ralas, formas de Kronecker, Schur...).

- Controles (Clásico, LQG, H-infinity...).

- Paquete para Inecuaciones Matriciales Lineales, optimización.

- Tiene procesamiento de señales.

- Simulación de varias órdenes.

- Presencia de optimización (diferenciable y no diferenciable, resolución LQ).

- Metanet, con análisis de grafos y optimización).

- Con capacidad simbólica a través de una interfaz con Maple.

Concepción metodológica empleada

Empleo de una metodología de investigación-acción basada en la teoría de la investigación interpretativa. El docente actúa como observador participante en relación con el proyecto de investigación-acción. Se buscó la profundización del investigador educativo en el contexto que analizaba para captar el sentido de las acciones de los participantes. Para el propio docente, el aula no era un espacio físico, sino un laboratorio, donde él mismo adquiría conocimientos y ampliaba sus puntos de vista.

Las preguntas, respuestas y sugerencias de los estudiantes ofrecieron un campo de investigación activa además de la didáctica de las matemáticas como ciencia. La eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje mejora cuando el trabajo de aula se convierte en un espacio de investigación. En esta línea, se aplica el punto de Kierkegaard cuando dice:

> “Ser un maestro en el sentido verdadero es ser un aprendiz. La investigación inicia cuando el docente aprende del alumno, poniéndose en su lugar de manera que pueda comprender lo que el alumno entiende y la forma en que lo hace".

Concepción epistemológica y didáctica

La estrategia pedagógica usada en esta experiencia se fundamenta en las concepciones que importantes investigadores introdujeron en las últimas décadas, entre las que se cuentan:

- Concepción del estudiante como sujeto activo de los procesos educativos.

- Concepción de una relación interactiva y dialógica entre el educador y el alumno con el propósito de lograr un cambio de actitudes, comportamientos y grado de conocimiento de ambos sujetos, sin que esto implique la pérdida de identidad y de roles específicos.

- Valoración de la importancia de la motivación y la vivencia para conseguir aprendizajes significativos y perdurables.

- Valoración de la interacción entre los aspectos cognitivos, psicomotrices y afectivos que operan en los procesos de aprendizaje.

Acción

El factor que inició la acción fue el problema motivador resuelto con herramienta computacional. Cada uno de los problemas han sido preparados de forma cuidadosa, como unidad de aprendizaje. Se buscaron problemas en apariencia muy simples, sin embargo, promovieron un intensiva reflexión, sobre propiedades conocidas, conducentes a la búsqueda de soluciones.

Papel de las herramientas empleadas y enfoque epistemológico

En este contexto, la herramienta informática influyó en el abordaje epistemológico de las matemáticas. Expresaba Pólya que:

> las matemáticas son consideradas una ciencia demostrativa, ese es solamente uno de sus aspectos. El trabajo matemático parece puramente demostrativo cuando está terminado, y consiste únicamente en demostraciones. Sin embargo, esta ciencia es similar en su desarrollo a cualquier otro conocimiento humano. Un teorema matemático debe ser intuido antes de que pueda ser probado. Así como la idea de una prueba antes de hacer los detalles. Es necesario conectar observaciones, seguir analogías e intentarlo una y otra vez. El resultado del trabajo demostrativo de un matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba; pero a su vez está construido por el razonamiento plausible, la intuición. Si el estudio de las matemáticas es en cierta medida un reflejo de la invención de esta ciencia, debe haber lugar para la intuición, para las conclusiones plausibles.

El método de enseñanza empleado se fundamentó en el documento de trabajo "Perspectivas sobre la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI" presentado por ICMI RESEARCH 8 ICMI, Sevilla, 1996, donde se expone que la geometría debe crear conexiones sistemáticas incluso en niveles avanzados, entre teorías generales abstractas y su interpretación intuitiva y visual.

La resolución de problemas se concibe como una actividad que crea un proceso en el que el estudiante combina conocimientos, reglas, técnicas, habilidades y conceptos previamente adquiridos para encontrar una solución a una nueva situación. Las matemáticas se reconocen como un producto y un proceso; e información organizada y actividad creativa en la que participa el alumno. De hecho, se puede argumentar que el propósito real de aprender reglas, técnicas y contenidos es principalmente permitir que el estudiante actúe en matemáticas y, por supuesto, que resuelva problemas. Así, la resolución de problemas puede considerarse la verdadera esencia de las matemáticas.

Problema de investigación

Esta fue una situación didáctica que surgió en las clases de álgebra lineal, considerado el módulo previo al curso de teoría de control. Los sistemas dinámicos lineales son la base para la modernización de la mayoría de los sistemas en economía, ingeniería y ciencias aplicadas. Su simplificación y división en subsistemas más simples (desacoplamiento del sistema) se basa en el álgebra lineal, y especialmente en los conceptos de matriz y diagonalización de formas de Jordan.

Enseñar la forma canónica de Jordan siempre ha sido difícil por las siguientes razones:

1. La complejidad y profundidad de la teoría fundamental.

2. Dificultad para ilustrar conceptos con cálculos manuales (el orden de las matrices apenas aumenta a dos). Por ejemplo, invariancia del subespacio, función matricial aplicada a vectores de diferentes subespacios en forma canónica, etc.

3. Falta de tiempo destinado en el currículo a aplicaciones que despierten el interés del estudiante por aprender.

Estas dificultades generales se magnifican cuando se trata de enseñar a estudiantes que no están estudiando matemáticas. Siendo un desafío que a menudo se pasa por alto. Se trata de resistir la tentación de desarrollar contenidos matemáticos como si los estudiantes fueran matemáticos en potencia y, en cambio, es preciso buscar métodos alternativos. En este punto las herramientas computacionales pueden ser de gran ayuda.

Asimismo, los cursos especiales de matemáticas para carreras profesionales tienen una dificultad adicional: el alejamiento cronológico del álgebra lineal básica conduce al olvido de conceptos básicos en el manejo de operadores lineales, como propiedades de polinomios y nociones de espacio vectorial, y transformaciones lineales. En este ejemplo se hace una evaluación del papel de la herramienta informática en la solución de la segunda dificultad planteada, que se refiere a la velocidad de respuesta de la computadora en la búsqueda de conceptos y verificación de características. Este proceso, a su vez, es necesario para crear conocimiento importante.

Situación en el aula

Se trabajó conforme a los siguientes ejes:

1. La metodología basada en la participación del estudiante como agente de su aprendizaje procuró habilitarlo con el uso de programas informáticos.

2. Las pautas de trabajo fueron las siguientes:

    - a) Los alumnos trabajaron en un laboratorio de computación (dos o tres por máquina), en el tiempo asignado a clases prácticas.

- b) En un comienzo se utilizó la computadora como una gran calculadora numérica, con funciones incorporadas de álgebra lineal (sistemas computacionales para el cálculo matricial).

- c) Los alumnos no recibieron nociones específicas sobre sistemas operativos ni programación, ya que existen sobre estos temas espacios y tiempos previstos en el currículum.

- d) Se realizaron trabajos prácticos para el repaso y manejo de los siguientes temas: operatoria matricial, sistema de ecuaciones lineales, espacios generados, dependencia e independencia lineal, base, dimensión, rango, imagen, bases ortogonales y transformaciones lineales.

Estrategias didácticas

Las tareas consistían en recopilar conocimientos sobre situaciones problemáticas y consolidar conceptos. La computadora ahorró tiempo en los cálculos rutinarios y en la configuración y solución de problemas de datos reales. La elaboración del plan metodológico se basó en la participación de los estudiantes utilizando la herramienta de discusión. La actividad fue organizada por proposiciones sucesivas que surgieron del problema motivador original utilizado como disparador. La inducción natural fue seguida por las propias preguntas de los estudiantes. Problemas motivadores (a veces simpleza ingenua) fueron diseñados en un verdadero trabajo de diseño didáctico.

Recopilación de datos

Se observaron las actitudes y habilidades del estudiante en problemas que involucran conceptos de álgebra lineal que pueden ser resueltos con apoyo de computadora.

Estudiante frente a la computadora.

Prueba de percepción y almacenamiento:

- Capacidad de comunicarse entre símbolos matemáticos y lenguaje informático.

- Velocidad de captura de la lógica del sistema.

- Reacciones a respuestas inesperadas de la computadora.

Estudiante antes de aprender

Valoración y registro:

- Interpretación y uso de la notación y el lenguaje de símbolos del álgebra lineal.

- Habilidad para investigar la validez de propiedades desconocidas por analogía o intuición.

- Una oportunidad de obtener nueva información sobre el error.

- Capacidad para completar pequeñas tareas teóricas.

- Habilidad para formular y resolver problemas de álgebra lineal en situaciones del mundo real.

- Criterios para el análisis de soluciones.

Registro de observaciones

Los estudiantes propusieron los pasos a seguir en el primer problema planteado: diagonalizar la matriz.

Paso 1.

Autovalores obtenidos

Los estudiantes encontraron los autovalores de la matriz empleando la función SPEC del sistema. El vector formado por los autovalores que se obtuvo de la matriz A en el orden dado se designó en este trabajo con la siguiente manera (los autovalores son únicos, pero no forman un conjunto ordenado):

L = SPEC(A) L = [-1, -1, -1]

Se observa que la multiplicidad algebraica del autovalor -1 es igual a 3.

Paso 2

Autovalores obtenidos y autovalores anteriores

Los alumnos procedieron al cálculo de los autovectores correspondientes, usando ahora la función KER del sistema Scilab (Basile). Se recordó la definición de autovalor y autovector:

Siendo **A** una matriz de **n** por **n** con componentes reales o complejos, el número **L(i)** (real o complejo) se denomina autovalor de **A** si existe un vector diferente de cero **U** tal que

A U = L(i) U

El vector **U** distinto del vector nulo lo llamaron autovector de **A** correspondiente al autovector **L(i)**. Esta ecuación es equivalente a la ecuación matricial

(A - L(i) I) U = 0

La igualdad origina un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, con un determinante nulo por definición de autovalor. Las soluciones encontradas de este sistema forman un espacio vectorial. La resolución de este sistema es equivalente a encontrar el núcleo de la transformación (**A-L(i) I**).

La función KER que se aplica a la matriz **(A - L(i) I)** en el sistema computacional Scilab (Basile) proporciona una base de este subespacio.

Sea R = KER(A-L(i) I)

Obteniéndose una matriz donde las columnas representan los autovalores buscados. Encontrándose que el subespacio característico asociado al autovalor -1 es de dimensión dos.

Paso 3

Respuestas naturales a:

a) ¿Qué significa la multiplicidad geométrica?

b) ¿Relación existente entre la multiplicidad geométrica y la algebraica?

Siendo **L(i)** un autovalor de la matriz **A**, se tiene que la multiplicidad geométrica de **L(i)** es la dimensión del subespacio KER **(A-L(i) I)**. Los participantes observaron que la multiplicidad geométrica es menor que la multiplicidad algebraica; así, la matriz **A** no es diagonalizable. En este caso es posible encontrar una matriz semejante, más sencilla, aunque no diagonalizable.

Por lo tanto, se propone una transformación que conduzca a la matriz dada a una forma "parecida" a la forma de Jordan J. No obstante, el problema principal es encontrar una matriz que permita la transformación semejante, es decir una matriz **M** tal que **A M = M J**, donde **J** es la matriz de Jordan. Entonces, las columnas de **M** serán vectores de una base contentivos de los autovectores ya hallados. Originándose un problema semejante al primero.

Paso 4

Obtención de vectores que conforma una base de dimensión 3, contentiva de autovectores calculados y con columnas que formen una matriz M adecuada.

En el trabajo “Elementary Linear Algebra”, Stanley I. Grossman propuso el uso de fórmulas de Filippov para el cálculo de los llamados autovectores generalizados que permiten completar una base del espacio en cuestión, justificándose la fórmula para una matriz de segundo orden.

Los estudiantes aplicaron esta fórmula a la matriz de orden tres del problema (A+I) V=U, donde U es uno de los autovectores obtenidos y V es un autovector generalizado que se trata de encontrar. Al buscar la solución de la ecuación con cualquiera de los dos autovectores, remplazando U por cualquiera de los obtenidos se origina una incompatibilidad

Los alumnos realizaron el cálculo siguiente: Matriz del sistema.

Cálculo del rango de la matriz usando la función RANK, se tiene: RANK(A+I) = 1. La matriz ampliada con la primera columna de R donde las columnas son los autovectores de A, la notamos [A + I, R(:,1)].

Donde con R(:,i) en el sistema Scilab se indica la columna iésima de la matriz R. Luego

RANK([A+I, R(:,1)] = 2

Matriz ampliada con la segunda columna de R resultará y también RANK([A+I, R(:,2)] = 2.

Se determina que la matriz del último sistema tiene rango 1 mientras que la matriz ampliada con cualquiera de los dos autovectores tiene rango mayor. La situación provoca sorpresa en los alumnos ya que, en el curso de álgebra lineal previo, siguiendo los postulados de Stanley I. Grossman, demuestran que para matrices de segundo orden, a partir de un autovector U existe un autovector generalizado V que satisface la ecuación (A+I) V=U Pero la fórmula no funciona para este ejemplo.

¿Qué ocurrió?

Los estudiantes hicieron una inducción falsa al generalizar el enunciado anterior a cantidades distintas de dos. Para estas secuencias, siempre hay un vector propio generalizado del vector que pertenece al espacio propio. Sin embargo, el vector inicial para la implementación del algoritmo no es ningún vector en el espacio vectorial propio (o espacio propio).

Aquí, radica la importancia de las herramientas informáticas en la generación de conocimiento a través de un razonamiento plausible e intuitivo se hace evidente desde el principio, con pruebas que estimulan la abstracción reflexiva y la búsqueda de una teoría fundamental. De hecho, para estos estudiantes, este ejemplo trascendió la teoría conocida.

Surgiendo otro problema del trabajo de clase: Encontrar un vector en el espacio vectorial adecuado, que, sustituyendo en la fórmula de Filippov, dé una solución. Este problema fue atacado con diferentes criterios según los grupos de estudiantes, buscando un algoritmo teórico demostrable intuitivamente, es decir teorema de la construcción. Muchos grupos de estudiantes enfrentados al problema comenzaron a proporcionar vectores (sin criterios específicos) y probar en la computadora la posibilidad de obtener valores más altos.

El profesor, como observador participante, trató de estimular el pensamiento geométrico todo el tiempo. A continuación, mostramos una propuesta especialmente interesante de un grupo de estudiantes. Siguieron este razonamiento: en lugar de tratar ciegamente de hacer pruebas consecutivas (como hicieron la mayoría de los grupos) para aplicar la fórmula de Filippov, eligieron usar un vector de espacio de columna asociado con la matriz *R*. Buscando un pseudovector generalizado que permita completar la base con ciertos criterios geométricos. Donde con criterios totalmente intuitivos, audaces y la velocidad de ensayo y error que permite el ordenador, aplicaron la fórmula de transformación de semejanza (cambio de posición) que utilizarían para un vector propio generalizado real. Procediendo, así, a la resolución de matrices.

Resultados logrados

Obtuvieron una matriz semejante a Jordan, sin embargo, no la forma canónica propiamente dicha. Pero no se dieron por vencidos y por eso iniciaron una nueva estrategia

Paso siguiente

Siguiendo ideas intuitivas, emplearon un pseudo autovector generalizado **[1 ,2, -1]** colocándolo en la fórmula de Filippov, en el lugar que tendría un verdadero vector generalizado en el primer miembro. Realizaron el producto indicado en el primer miembro de la fórmula y obtuvieron ahora un vector que intuyeron podría pertenecer al espacio generado por los autovectores obtenidos, es otras palabras usaron la filosofía de la fórmula de Filippov en el sentido inverso.

Conclusiones de la experiencia

- Las observaciones realizadas en esta experiencia muestran la compatibilidad del aprendizaje del grupo de estudiantes con la comprensión de Pólya sobre el aprendizaje de las matemáticas. De hecho, la operación intuitiva de demostraciones sucesivas condujo a un razonamiento geométrico plausible y, después de la intuición del algoritmo, a la demostración de la propiedad.

- Las herramientas informáticas proporcionaron un entorno de trabajo intelectual y generaron ideas que habrían sido imposibles de llevar al juego de prueba y error sin la ayuda de una computadora.

- Si bien el trabajo descrito y registrado fue realizado por un grupo de estudiantes, otros estudiantes mostraron gran interés en el tema.

- Por lo general, el tema se cubre solo a nivel teórico en las clases de álgebra lineal. No se afianzan el trabajo con ejemplos.

- Aunque no todos los grupos lograron resultados sorprendentemente creativos como el grupo de comparación, el trabajo de todos los estudiantes fue intenso en la comprensión y manejo de conceptos teóricos. Recordemos que es una asignatura cuya teoría se considera “memorización de oraciones” incluso a nivel de pregrado.

- Todos los estudiantes vieron el álgebra lineal como una materia que promueve el estudio de propiedades más que como una teoría que se estableció previamente en base a algún ejemplo.

- En la experiencia descrita, los estudiantes alcanzaron un nivel de aplicación inusual. El crecimiento cognitivo se evaluó como el desarrollo de conceptos y procesos.

Capítulo 5

Propuestas de Pólya

Para proponer e identificar diferentes formas en la que los algoritmos pueden usarse en la resolución de problemas, es necesario sentar las bases sobre diferentes aspectos de la resolución de problemas y los algoritmos. Los planteamientos de Pólya en particular permiten confirmar las hipótesis, aportando elementos que facilitan a la investigación conectar algoritmos como parte creíble.

De la misma manera, las diferentes heurísticas propuestas por Pólya, que de alguna manera utilizan otros autores para resolver problemas, permiten proponer diferentes formas de utilizar los algoritmos relacionados. Así, también destaca los elementos teóricos más importantes de la resolución de problemas, en los que además de explicar las definiciones asumidas, algoritmos vs. Resolución del problema.

La resolución de problemas es una parte importante de la investigación en educación matemática desde la década de 1960, y Pólya (1945) es uno de sus principales precursores. Shoenfeld (1985, citado en Alonso y Martínez, 2003) divide el trabajo desarrollado en esta área en cuatro enfoques:

- Problemas que sitúan a las matemáticas en un contexto de “mundo real”.

- Matemáticas aplicadas o modelos matemáticos: se refiere al uso de matemáticas superiores para resolver problemas del mundo real.

- Investigación sobre procesos cognitivos: investigación relacionada con el estudio de aspectos del pensamiento matemático relacionados con la resolución de problemas.

- Definir y enseñar las habilidades necesarias para resolver problemas matemáticos.

A estos enfoques se suma la resolución de problemas como estrategia para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que es quizás el enfoque a través del cual se desarrolla la mayor parte de la investigación actual en educación matemática. El trabajo de Pólya (1945) puede estar en el cuarto enfoque y fue y sigue siendo un referente teórico para el desarrollo de la investigación actual en resolución de problemas. Además, dado que los intereses de la investigación no eran los aspectos cognitivos, no tomaba en cuenta las aplicaciones de las matemáticas o las propuestas didácticas, y no pretendía solo ser un medio para describir el mundo real, la investigación se diseñó en el cuarto enfoque.

Las herramientas teóricas propuestas por Shoenfeld fueron las propuestas en el trabajo de Pólya . Por otro lado, Pólya afirma que el uso del término solución en diferentes oraciones puede causar confusión en su comprensión, pues significa: acciones realizadas en relación con la resolución de una tarea, resultado de dichas acciones un objeto que cumple las condiciones del problema. Por su parte, Puig (1996) distingue entre los términos resultado, solución y solución, argumentando que el primero es el dato que cumple las condiciones de la tarea, el segundo corresponde a la representación final de los pasos que conducen al resultado.

En tercer lugar, a las acciones realizadas para encontrar una solución, considerando las diferencias señaladas por Pólya y Puig (1996), y coincidiendo con las opiniones de Codina y Rivera (2001) acerca de pensar una solución como un objeto que cumple las condiciones presentadas en un problema, y una solución como una colección de actividades que cumple el solucionador que puede conducir a la solución de un problema como encontrar una incógnita.

En su propuesta, Pólya propone cuatro pasos para resolver un problema:

- comprender el problema,
- formular un plan,
- implementar el plan e
- investigar la solución resultante.

Si durante los dos últimos pasos es posible completar, sistematizar y diferenciar el conjunto final de pasos que dan solución al problema, se dice que permite el uso de al menos un algoritmo de solución.

5.1. Solución de problemas mediante algoritmos

Esta categoría incluye usos que ocurren cuando se utilizan algoritmos de resolución de problemas conocidos para encontrar elementos desconocidos o adicionales que no forman parte del problema original, pero que brindan información importante para resolverlo. Estos últimos se denominan elementos auxiliares. La revisión de los trabajos de Pólya condujo a las siguientes formas de utilizar algoritmos controlados experimentalmente, caracterizados por:

- Solución inmediata del problema utilizando el algoritmo.
- Composición iterativa de un mismo algoritmo.
- Compilación de dos o más algoritmos diferentes.
- Empleo de un algoritmo analógico.
- Uso de un algoritmo para definir elementos auxiliares.

5.1.1. Solución inmediata de un problema

En los procedimientos propuestos por Pólya para la resolución de un problema se encuentra la generalización, consiste en pasar del examen de un problema o un conjunto de problemas al examen de un más amplio grupo de problemas que lo(s) contiene(n). El problema para solucionar todos los problemas del conjunto más amplio, se denomina problema general, mientras que cada uno de los problemas de este grupo es llamado problema particular. Cuando un problema general acepta un algoritmo de solución, éste puede usarse para resolver el problema particular, y se aplica sin mayores variaciones a los datos del problema particular propuesto. Entonces, se ha realizado una solución inmediata del problema por medio de un algoritmo.

5.1.2. Composición iterada de un mismo algoritmo

Otro procedimiento propuestos por Pólya es la descomposición y recomposición, en los cuales se toma una idea directriz para la solución del problema y éste se divide de manera que el procedimiento se centre en los detalles del problema, cada uno de ellos se convierte en un problema auxiliar.

Luego de encontrar la solución de cada uno de estos problemas auxiliares, la directriz antes tomada permitirá componer todas las soluciones y encontrar la solución del problema original. Es lógico intentar descomponer el problema en otros conocidos, de modo que, si éstos poseen un algoritmo de solución, su concatenación conduzca a la solución del problema original o la construcción de un algoritmo que se use para encontrar la solución.

En el caso de tomar una parte o la totalidad de los algoritmos de solución de los problemas auxiliares, para encontrar la solución del problema original, puede presentarse la composición iterada de un mismo algoritmo o la composición de dos o más algoritmos diferentes.

El uso primario puede originarse cuando: se utiliza repetidas veces un mismo algoritmo, los algoritmos de solución de los problemas auxiliares en los que se descompone el problema original comparten la secuencia de pasos, o cuando los problemas auxiliares constituyen parte de un problema general con una solución que puede obtenerse mediante la aplicación de un algoritmo.

La segunda utilidad puede presentarse si se aplican dos o más algoritmos que solucionan los problemas auxiliares en los que se descompuso el problema original, donde cada uno de los algoritmos difieren en al menos uno de sus pasos.

5.1.3. Empleo de un algoritmo análogo

En los procedimientos que propone Pólya (1945), es posible utilizar el método o el resultado obtenido de la solución de problemas análogos para encontrar la solución del problema original. Específicamente, si se emplea el algoritmo de solución de un problema análogo, bien sea repitiendo algunos pasos, variando únicamente los datos iniciales o usando los datos finales como elementos auxiliares del problema original, se dice que se usó un algoritmo análogo para hallar los datos.

5.1.4. Algoritmos en la determinación de elementos auxiliares

A la hora de resolver un problema, muchas veces es necesario introducir elementos auxiliares, ya sea para aumentar la cantidad de datos, para definir nuevas relaciones, o simplemente para entender el problema. Además, en geometría, donde algunos de los elementos representados se obtienen por construcción, se suele utilizar la representación gráfica para entender el problema. Por lo tanto, los algoritmos se utilizan para determinar elementos auxiliares cuando el elemento agregado es muy importante para resolver el problema original.

Capítulo 6

Retos para la docencia

A nivel internacional, la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático están cada vez más presentes en los currículos de matemáticas. En particular, el pensamiento analítico trata sobre la formulación e investigación de suposiciones matemáticas y el desarrollo y evaluación de argumentos y pruebas matemáticas como una forma especial de razonar y expresar el razonamiento. Esta tendencia tampoco es ajena al currículo español, puesto que exige que los estudiantes sean capaces de formular hipótesis y suposiciones, y razonar con ellas.

Un análisis cuidadoso y deliberado en relación con los conceptos mencionados anteriormente puede ser sugerente, interesante e incluso desafiante para profesores e investigadores interesados tanto en la resolución de problemas como en la educación estocástica[2]. Particular, el criterio de evaluación de la competencia del alumnado en relación con la capacidad de formular juicios (opiniones) en situaciones sencillas, en las que no existe el azar, y de verificar dicho resultado (según probabilidades) del estándar "hacer conjeturas y estimaciones sobre cualquier juego (monedas, dados, cartas, loterías, etc.) conjuntamente con: resolver tareas que requieran control heurístico del contenido de estadísticas y probabilidades, estrategias, razonamiento, hipótesis generación, construcción, argumentación y toma de decisiones, evaluando sus implicaciones y facilidad de uso, estándares que se reproducen para estudiantes de primaria y de secundaria.

---

2. Se empleará el término estocástico para hacer referencia a una forma de pensamiento que combina ideas estadísticas y probabilísticas, facilitando la toma de decisiones y asumir riesgos, de una forma razonable, en situaciones de incertidumbre (Schupp, 1989).

Los profesores podrían preguntarse: ¿cómo hacer eso cuando la literatura especializa no parece hacerlo fácil? La primera respuesta se puede encontrar en los llamados trabajos de Lakatos (1976) y Pólya (1966), que Fiallo y Gutiérrez (2017) denominan pruebas conjeturales, pero con la notable diferencia de que, por su estocasticidad, pueden ser consideradas conjeturas—afirmadas para convencer de la bondad de una conjetura más que para probar formalmente su verdad, como en estos problemas.

El nivel de exigencia que estas prescripciones curriculares representan para los docentes, su escasa preparación al respecto (Huerta, 2018), y en forma inicial y permanente, la falta de recursos a utilizar, incluidos los libros de texto vigentes, que no ayudan a los docentes a asegurar el logro de los estudiantes logren esas competencias, la resolución de tareas rutinarias, el modelo de enseñanza mecanicista, con el que se suele tratar la enseñanza de la probabilidad y la estadística, invita a pensar cuál debe ser la formación básica y continua de los futuros docentes para participar en otras formas de educación.

Otra forma de incentivar el uso y formulación de hipótesis basadas en la resolución de problemas es activar el razonamiento plausible (Pólya, 1966) para formular supuestos razonables y diseñar procedimientos que permitan argumentar sobre la validez del supuesto realizado. Otra forma de enseñar probabilidad que se relaciona brevemente con las operaciones matemáticas.

6.1. Hipótesis en la literatura

Hasta donde se sabe, existen pocos trabajos en la literatura de educación matemática que presten especial atención a la dialéctica de hipótesis-conjeturas en investigaciones que no traten con demostraciones matemáticas. Furinghetti, Olivero y Paola (2010) realizan un experimento didáctico, los autores reflexionan sobre las dificultades a las que se enfrentan tanto profesores como alumnos para resolver tareas abiertas de demostración hipotética.

Del mismo modo, Fiallo y Gutiérrez (2017) investigan qué aspectos cognitivos ponen de relieve los estudiantes en un mismo tipo de problema:

- primero, al formular una conjetura, y
- segundo, al demostrar que la conjetura es, matemáticamente verdadera, necesitándose formular una prueba formal.

De Villiers y Heideman (2014) muestran cuán alejada está la actividad matemática de las actividades escolares con las matemáticas, señalando que, por ejemplo, no siempre se hacen las suposiciones correctas, muchas veces la primera se equivoca, por eso es tan importante el rechazo de una premisa como falsa. Pero se quejan de que la enseñanza no favorece este aspecto del trabajo matemático, que suele mostrar el producto final matemáticamente pulido sin mostrar su desarrollo, y no favorece la fórmula de conjeturas refutables como una forma de desarrollar el pensamiento crítico.

Sin embargo, esperan que, tanto en la escuela obligatoria como a nivel universitario, los estudiantes tengan la oportunidad de formular sus suposiciones y luego probarlas o refutarlas. En la misma línea se encuentra Lampert (1990), para quien correr el riesgo de los supuestos informados (en el sentido de Lakatos, 1976) presupone el reconocimiento de la confirmación de las hipótesis investigadas por el autor del supuesto, que lo observado puede haber sido algo limitado y las conclusiones pueden haber sido inapropiadas.

Este trabajo va en la línea donde la resolución de problemas probabilísticos que llamamos conjeturas - discutiendo su verosimilitud o confiabilidad, ofrece a los estudiantes una buena oportunidad para desarrollar conjeturas con riesgo, pero controladas mediante la resolución de problemas.

Mayor es aún la escasa presencia de la dialéctica hipótesis-supuesto en la literatura de educación estocástica en las diversas formas en que cada uno se expresa. La presencia de estos términos suele hacer referencia a la actividad matemática en la que se desarrolla. Así, aparecen en procesos de modelado en el sentido de hipótesis de trabajo y en el sentido de supuestos en procesos de simulación. Huerta (2018) señala que esta dialéctica debe desplegarse en procesos probabilísticos de resolución de problemas, en contraste con el escaso papel atribuido a esta dialéctica en estudios previos, que pensamos debe encontrarse en la construcción del pensamiento estocástico y matemático según.

De hecho, en el juego hipotético-conjeturas y su argumento a favor o en contra, se piensa que el proceso de modelado o simulación para justificar la bondad de la suposición es razonable y cuánta bondad parece mostrar la probabilidad. L investigación y los enfoques para esta enseñanza basada en juegos, resultan escasos, aunque autores como Pratt (2011) y Pfannkuch (2018) sugieren cambios para una comprensión revisada de la probabilidad y el currículo del siglo XXI.

Efectivamente, Pratt (2011) considera la idea de “ansiedad epistemológica” como una metáfora de la ansiedad que el aprendizaje de un concepto, la probabilidad, provoca en los estudiantes en más de un sentido: clásico o teórico, repetitivo o empírico y subjetivo, argumenta que las propuestas curriculares actuales no pueden mitigarlo, sino exacerbarlo.

Estas sugerencias se basan casi exclusivamente en resolver problemas de rutina con monedas, dados, ruedas de ruleta o bolas en bolsas opacas. La relación entre los diferentes significados de las probabilidades se limita a probar/simular estos materiales para encontrar un límite de frecuencias relativas como si existiera. Estas afirmaciones generalmente no tienen probabilidad subjetiva. Dicha ansiedad también puede extenderse a los docentes, quienes son prisioneros de las recomendaciones antes mencionadas, y esto tiene consecuencias evidentes para la ansiedad de los estudiantes.

Pratt (2011) recomienda considerar la probabilidad como una herramienta para modelar fenómenos inciertos y enseñarla para tener en cuenta las propuestas actuales en educación estadística, como el análisis exploratorio de datos y la inferencia informal, que tienen en cuenta la extensión, el acercamiento al razonamiento estocástico a edades muy tempranas y la simulación como herramienta para estudiar el comportamiento de fenómenos inciertos.

Por otro lado, según Pratt (2011) y Pfannkuch (2018) prevén un nuevo enfoque del currículo de estadística, que brindaría una educación adecuada para el ciudadano del siglo XXI. Los estudiantes deben recibir experiencias estadísticas significativas relacionadas con:

a) todo el ciclo de investigación estadística que va desde el problema inicial hasta la conclusión,

b) las hipótesis presentadas para investigar el modelo probabilístico que se está construyendo, y

c) la evaluación de argumentos con respecto a la confiabilidad/ fiabilidad de la hipótesis en la conclusión, formal o informal, con justificación.

Para obtener estas experiencias, la simulación se considera una parte integral de los procesos de modelado probabilístico. Pfannkuch (2018) recomienda considerar el modelado probabilístico como una parte importante del nuevo currículo y la investigación educativa estocástica.

6.2. Propuestas para un una enseñanza basada en la resolución de problemas

6.2.1. Hipótesis y conjeturas en el razonamiento

Según algunos autores, como Borovcnik y Kapadia (2018), se ha confirmado que los investigadores y educadores aún carecen de un modelo convincente que permita a los estudiantes observar y analizar el razonamiento probabilístico. Según ellos, se trata de un modelo en etapa de realización, por lo que su investigación es aún un problema de investigación abierto.

Existen un conjunto de categorías que forman un modelo tentativo para caracterizar dicho razonamiento en términos de habilidades. Entre estas categorías se encuentra una que incluye un análisis preliminar de las condiciones de una situación aleatoria específica que permite derivar las hipótesis necesarias para modelarla. En esta categoría se debe enfatizar la importancia de formular hipótesis y especulaciones para desarrollar mejor el razonamiento probabilístico y estocástico.

Los resultados de la investigación sugieren que una de las razones que podría explicar la determinación poco confiable de la probabilidad de un evento o el valor esperado de una variable aleatoria es el llamado la presencia de sesgo de igual probabilidad en el razonamiento, es decir, dada la hipótesis, ciertamente arbitraria o incluso extraña a cualquier otro observador, de que todos los eventos elementales en el espacio muestral son igualmente posibles, y en base a ello hacer una suposición sobre una probabilidad o valor esperado que es improbable, irrazonable o improbable para un observador, incluso para la persona que hace la suposición.

En el concepto clásico de probabilidad, basado en la hipótesis de igual probabilidad, la regla de Laplace proporciona una metáfora para expresar el supuesto de que todos los eventos tienen la misma probabilidad de ocurrencia utilizando la relación del número de casos favorables, número de casos posibles.

La hipótesis se formula con base en el principio de indiferencia o causa insuficiente. Entonces, desde la perspectiva del razonamiento probabilístico, los sujetos, incluso cuando operan bajo la ilusión de la igualdad de probabilidades, solo se comportan de manera inconsistente o irracional de usar, de acuerdo con la lógica impuesta por la regla de Laplace y el razonamiento subyacente, el principio de indiferencia.

Por lo tanto, desde una perspectiva didáctica, el sesgo de igual probabilidad puede brindar una buena oportunidad para aprender sobre el proceso y el significado de determinar la probabilidad de un evento, si se entiende como una forma de medir la confiabilidad de una mejor suposición sobre la ocurrencia de un evento, suposición que está condicionada por ciertas hipótesis previas y reglas de razonamiento plausible (Pólya, 1966).

Si la hipótesis aceptada es una hipótesis de igual probabilidad, la regla de Laplace nos permite cuantificar la mejor hipótesis posible. Si, por el contrario, se rechaza la hipótesis formulada, entonces la regla de Laplace no es útil y se deben utilizar otros métodos y procedimientos para medir la probabilidad o confiabilidad de la hipótesis.

En otras palabras, requiere presentar y resolver un problema, como advierte Pólya (1966). Pero las hipótesis no deben estar ausentes, y no deben estar implícitas o impuestas, como suele ocurrir en la docencia. Las hipótesis deben establecerse, discutirse, consensuarse y, compararse.

Para ello, los problemas deben entenderse como problemas de fiabilidad de suposiciones (hipótesis), que difieren en el desarrollo final de los problemas de fiabilidad de detección de Laktatos (1976) y Pólya (1966) o en los problemas de control de suposiciones de Fiallo.

6.2.2. Las hipótesis, conjeturas y el arte conjetural

Los términos hipótesis y conjetura cotidianamente se usan como sinónimos. Para muchos profesores de matemáticas, el uso indiferente de los mismo no resulta extraño por lo que confunden conceptos cuando su significado debe considerarse limitado al contexto de hacer matemáticas. Estudios parecen confirmar que estos términos tienen más de un significado para los futuros docentes, lo que a su vez sugiere dificultades para comprender el proceso de resolución de problemas que hemos denominado conjetura-confiabilidad/credibilidad, es decir, problemas que requieren la formulación de hipótesis, el establecimiento de conjeturas en función de las hipótesis formuladas y el examen de su fiabilidad o verosimilitud en relación con las probabilidades, como veremos más adelante, construyendo argumentos persuasivos.

Por lo tanto, parece necesario mirar los significados de estos términos desde diferentes perspectivas, ya sean enciclopédicas, filosóficas, epistemológicas o educativas, para poder interpretar en qué sentido los futuros profesores parecen pensar inicialmente en estos términos y en qué sentido. deberían utilizarlos para resolver los problemas propuestos en su enseñanza.

En su sentido enciclopédico, una hipótesis es "una suposición para sacar una conclusión sobre algo posible o imposible", mientras que una conjetura es "un juicio tomada sobre algo basada en la evidencia o la observación" (RAE), que en sí misma prevé una posible diferencia entre los significados de ambos términos.

Una hipótesis se presenta como una suposición sobre algo y una estimación formada por una suposición sobre algo. En particular, nos interesa el significado del término hipótesis de trabajo, que la RAE define como “una hipótesis establecida temporalmente como base para la investigación”. Ferrater (1965) define una hipótesis como un enunciado enlazado o una serie de enunciados que preceden a otros enunciados que forman su base. Esta definición nos permite intuir la relación entre hipótesis y conjetura en el sentido que nos interesa el razonamiento probabilístico: hipótesis como base de conjetura, hipótesis de igual probabilidad como base de conjetura que todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad.

En matemáticas formales, las hipótesis se relacionan con otras expresiones como fundamento, principio, postulado, conjetura o axioma (Ferrater, 1965). Esto se aplica, por ejemplo, a la definición formal de probabilidad de von Mises basada en hipótesis sobre colectivos, o la definición axiomática de Kolmogorov o cualquier otra de las muchas definiciones axiomáticas existentes que están sujetas a un estricto escrutinio necesario en el razonamiento probatorio. Pero este no es el tipo de razonamiento que defendemos, sino un razonamiento plausible y estocástico.

Así, consideramos la posición de Kant sobre las hipótesis cuando afirma que las hipótesis no deben ser meras opiniones, sino que deben basarse en la posibilidad del objeto. En este caso, los supuestos son hipótesis correctas "y razonables". Además, tratamos las hipótesis como una especie de andamiaje conceptual, es decir, una hipótesis de trabajo en el sentido que dice Ferrater (19659. Ferrater dice que el papel de estas hipótesis es ayudar a comprender mejor los fenómenos en cuestión. Los fenómenos no confirman (ni cambian) la hipótesis, de lo contrario no sería una hipótesis, pero no es completamente independiente de los fenómenos, de lo contrario no contribuiría en nada a la comprensión de estos.

La hipótesis de igual probabilidad como hipótesis de trabajo nos ayuda a comprender la ley de Laplace. Pólya (1966) habla de hipótesis estadísticas en la resolución de problemas de probabilidad. Estas hipótesis pueden entenderse como un conjunto de hipótesis de trabajo. Por ejemplo, si lanzamos un dado y estudiamos la probabilidad de que la mayoría de los números sean mayores que 4, la hipótesis estadística de que el dado se considera justo involucra dos hipótesis de trabajo, una sobre el comportamiento de cada uno de los dados que puede considerarse (por hipótesis) igualmente probable, y el otro se refiere al comportamiento de un conjunto de dados durante un ensayo aleatorio, dado que sus resultados son (por hipótesis) independientes.

Una hipótesis estadística no se evalúa a menos que este sea el caso, pero si el comportamiento esperado del fenómeno aleatorio bajo estas hipótesis no ocurre u ocurre con una probabilidad muy débil, se justifica una investigación de estas hipótesis. Así, hay una premisa para nuevas hipótesis, que es la transformación de letras iniciales.

6.2.3. Propuesta de enseñanza

Pólya (1966) discrimina entre problemas rutinarios y problemas no rutinarios. Los problemas probabilísticos, en los juegos de azar equitativos, donde la consideración de la hipótesis de la equiprobabilidad es razonable y la regla de Laplace permite otorgar probabilidades a los sucesos, pueden convertirse en problemas cotidianos en la enseñanza.

Continuando con Pólya, se tiene que los problemas rutinarios de probabilidad son útiles para la enseñanza, sin, embargo limitar la enseñanza de la probabilidad a este tipo de problemas es rebajar su aprendizaje a unos niveles escasamente útiles y formativos. Un ejemplo de su potencial puede verse en Minyana (2018). Es preciso desarrollar lo que aquí entendemos como pensamiento estocástico.

Animando a los estudiantes a considerar no sólo las hipótesis formuladas en un problema sino también aquellas que se requieren para su abordaje.

Efectivamente, un enfoque para la enseñanza de la probabilidad y la estadística como el que se infiere de lo que proponemos en este libro no podría tener éxito sin la presencia de un profesorado bien formado para ello. Así, Huerta (2015, 2018) propuso un modelo de formación fundamentado en la resolución de problemas con intención didáctica, en el que el profesor en formación tiene un doble papel frente a los problemas que se les propone:

- en lo inmediato como resolutores de los problemas y,

- posteriormente, como futuro profesor que encuentra en la resolución de los problemas que ha resuelto un marco ideal para producir enseñanza en probabilidad y estadística.

En este modelo idóneo, los problemas son concebidos como problemas de hipótesis conjetura-credibilidad/fiabilidad. En la resolución de este tipo de problemas existen la combinanción de aspectos procedimentales como:

- una forma heurística para la resolución de problemas,

- el empleo de simulaciones como método de resolución de problemas de probabilidad con contenido heurístico, y

- el análisis didáctico después del proceso de resolución como vía para cultivar una profesionalidad de los problemas, con el propósito, entre otros, de explorar las oportunidades de aprendizaje proporcionadas en la resolución de los problemas, considerados en el contexto de enseñanza.

El método de resolución que propone Huerta (2015, 2018), requiere que se formulen un conjunto de hipótesis, estadísticas en el sentido de Pólya (1966), con el objetivo de que la situación de incertidumbre original pueda ser abordada, modelizada. Anclada a estas hipótesis, el método propone que el resolutor haga alguna conjetura sobre la pregunta del problema cuya fiabilidad o credibilidad se cuestiona a continuación.

La fiabilidad o credibilidad de una conjetura está inmersa en un proceso de razonamiento plausible con el propósito de apoyarla, refutarla o reformularla. Implicando, además, un proceso de investigación donde la simulación o experimentación pueden ser los instrumentos necesarios para la formulación de la mejor conjetura. Además, se enmarca, en un enfoque más general sobre la enseñanza de las matemáticas llamado inquiry-based learning (IBL), definido como una forma de enseñar y prácticas de aula en la que los propios estudiantes preguntan y proponen cuestiones, exploran y evalúan.

Se infiere entonces, que el enfoque para la enseñanza de la probabilidad, en todos los niveles, esté basado en este juego hipótesis-conjetura más adecuado al quehacer matemático, con la diferencia de que, en un marco de incertidumbre, dada una hipótesis o un conjunto de ellas que conducen a una conjetura, de ésta no se predica sobre su verdad, lo que implica usar un razonamiento demostrativo (Pólya, 1966), sino sobre su fiabilidad o credibilidad en términos de probabilidades, implicando el uso del razonamiento plausible.

Esta sugerencia pretende, probar con otros enfoques alternativos a los actuales sobre la enseñanza de la probabilidad y, en consecuencia, de la necesidad de formación de los profesores en esta dialéctica, formación que en la mayoría de los casos es bastante deficitaria.

6.3 A modo de reflexión

Actualmente, la educación matemática está siendo cuestionada tanto en términos de contenido como de enfoque. El cambio de siglo y la irrupción indetenible de la tecnología en la vida de los ciudadanos pone en tela de juicio el conservadurismo de la educación matemática anclado en el siglo anterior.

Recientemente, se llevó a cabo una conferencia en Ginebra con el objetivo de responder a la pregunta: ¿Qué deben aprender los estudiantes en el siglo XXI? A través de la conferencia se recomiendan cambios en el currículo escolar de matemáticas, señalando qué partes o temas deben introducirse o enfatizarse y por qué, y más importante, qué aspectos deben minimizarse o incluso eliminarse.

Esta discusión argumenta que la probabilidad y la estadística juegan un papel más importante en las propuestas curriculares utilizando un enfoque diferente que, junto con un enfoque heurístico para resolver problemas realistas, contribuye al desarrollo del razonamiento estocástico. En este trabajo estamos llamando a las puertas de la formación docente del siglo XXI, que debe enseñar probabilidad y estadística.

Se propone un nuevo enfoque de la nueva enseñanza en todos los niveles educativos, basado en la dialéctica hipótesis-conjetura mediante la resolución de problemas realistas creadas como hipótesis-opinión-fiabilidad/fiabilidad, donde en la construcción de argumentos para apoyar o rechazar la hipótesis, es adecuado un enfoque teórico, iterativo o subjetivo de probabilidades.

Con este trabajo, también se avanza modestamente hacia una propuesta de un futuro currículo como el que plantea Pfannkuch (2018), que combina elementos de la actividad matemática en la resolución de problemas cuando se aplica a tareas probabilísticas y que se dan sentido entre sí. Implica algunos procesos de razonamiento: por ejemplo, el razonamiento matemático, basado en las hipótesis necesarias que permiten un tratamiento matemático de un problema realista formulado en este contexto en condiciones de incertidumbre; que presupone el razonamiento probable necesario para formular supuestos racionales y que finalmente presupone el razonamiento estocástico que permite construir argumentos sobre la fiabilidad o probabilidad de los supuestos enunciados. ¿O es el razonamiento estocástico una combinación de todos estos? La respuesta se encuentra en el desarrollo de propuestas como esta y la necesaria investigación sobre el comportamiento de los diferentes actores, docentes y alumnos.

Bibliografía

Alonso, I. y Martínez, H. (2003). La resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. *Revista pedagogía universitaria, 8*(3), 81 - 88.

Anido de López, M., & Rubio Scola, H. E. (1999). Un ejemplo de aprendizaje en el sentido de Pólya. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 2*(2-3), 5-17.

Anzola, M., (2011). La universidad transformada. *Educere, 15*(50), 187-189.

Bermúdez Tacunga, R., (2014). EL DESARROLLO TECNOLÓGICO DE LA SOCIEDAD Y SUS INCIDENCIAS EN EL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 14*(2), 1-18.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Tween Concepts. In C. Batanero & E. Chernoff (eds.). *Teaching and Learning Stochastics, ICME-13 Monographs.*

Brown, G. y Atkins, M. (1988). *Effective teaching in Higher Education*. Ed. Routledge. Londres.

Chávez Rocha, R. M., & Vargas Cortez, C. D. (2007). El papel de la asesoría académica en los programas de tutorías: caso ITT. *Tiempo de Educar, 8*(15), 9-36.

Coronel, M. y Curotto, M. (2008). *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 7*(2), 463-479.

De Jesús, M. I., Méndez, R., Andrade, R., & Martínez, D. R. (2007). Didáctica: docencia y método. Una visión comparada entre la universidad tradicional y la multiversidad compleja. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales,* (12), 9-29.

De Miguel Díaz, M. (coord.) (2006). *Metodologías de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo de competencias*. Orientaciones para el profesorado universitario ante el espacio europeo de educación superior. Madrid: Alianza editorial.

De Villiers, M., & Heideman, N. (2014). Conjecturing, Refuting and Proving within the Context of Dynamic Geometry. *Learning and Teaching Mathematics, 17*, 20-26.

Ferrater Mora, J. (1965). *Diccionario de Filosofía.* Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Fernández, A. (2006). Metodologías activas para la formación de competencias. *Educatio Siglo XXI*, 24.

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics, 92*(2), 145-167.

Fortea Bagán, M. Á. (2019). *Metodologías didácticas para la enseñanza/aprendizaje de competencias.*

Furinghetti, F., Olivero F., & Paola, D. (2010). Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 32*(3), 319-335.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma, 19, 51-63.*

Guibert González, I. D., & Ulloa Kindelán, E. (2011). Algunas consideraciones acerca de las etapas para solucionar problemas. *EduSol, 11*(37), 50-60.

Huerta, M. P., (2020). Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: retos para su enseñanza y en la formación de profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 23*(1), 79-102.

Huerta, M. P. (2018). Preparing Teachers for Teaching Probability Through Problem Solving. In C. Batanero and E. J. Chernoff (eds.), *Teaching and Learning Stochastics, ICME-13 Monographs,* 293-311.

Ibarra Mendívil, J. L., (2003). La universidad necesaria . *REDIE. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5*(1).

Jáuregui, R. M., (2003). El método de Lancaster. *Educere, 7*(22), 225-228.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge Academic Press.

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is not the Answer: *Mathematical Knowing and Teaching. American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Martínez Ruiz, X., (2017). Presentación. Pedagogías metacognitivas y la construcción de un foro dialógico. *Innovación Educativa, 17*(74), 8-10.

Meneses Espinal, M. L., & Peñaloza Gelvez, D. Y. (2019). Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la competencia resolución de problemas matemáticos con operaciones básicas. *Zona Próxima,* (31), 7-25. https://doi.org/10.14482/zp.31.372.7

Newell, A. y Simon, H.A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Ochoa, A., (2015). La universidad en su laberinto. *Educere, 19*(62), 237-238.

Parra, B., (1990). Dos concepciones de resolución de problemas. *Revista Educación Matemática, 2*(3), 22-31.

Pedroza Flores, R., (2006). La interdisciplinariedad en la universidad. *Tiempo de Educar, 7*(13), 69-98.

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación, 35*(73), 169-193.

Pólya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas.*Trad. de Julián Zagazagoitia. México, D.F.: Trillas.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Sánchez Robayo, B. J., & Fonseca González, J. (2012). Algoritmos como herramienta en la búsqueda de nuevos datos para la resolución de problemas sobre isometrías del plano. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED,* (32), 11-22.

Sanmartín, R., (2013). EL MÉTODO DE LA COGNICIÓN INCORPORADA. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación,* (14), 79-125.

Scucuglia, R., (2005). Reseña de "Arquimedes, Pappus, Descartes e Pólya - quatro episódios da história da heurística" de BALIEIRO FILHO, Inocêncio F.. *Boletim de Educação Matemática, 18*(23).

Schup, H. (1989). Appropriate teaching and learning of stochastics in the middle grades (5-10). In M. Morris (Ed.) *Studies in Mathematics Education. The teaching of statistics,* 101-121. Paris: UNESCO.

Zabalza, M.A. (2011). Metodología docente. *Revista de docencia universitaria, 9*(3).

Depósito Legal N°: 2023-01904
ISBN: 978-612-49219-3-3

Editorial Mar Caribe

www.editorialmarcaribe.es

Jr. Leoncio Prado, 1355. Magdalena del Mar, Lima-Perú

RUC: 15605646601

Contacto: +51932557744 / +51932604538 / contacto@editorialmarcaribe.es