EMC
EST. 2021
EDITORIAL MAR CARIBE

TEORÍA MATEMÁTICA REALISTA DE HANS FREUDENTHAL: DIDÁCTICA Y PARADIGMAS DE LA INVESTIGACIÓN

LIBRO DE INVESTIGACIÓN

JUAN CARLOS LÁZARO GUILLERMO
ERICK GUITTON LOZANO
JUAN LUIS PÉREZ MARÍN
MILTON JUAN CARLOS BARREDA FACHIN
ROGGER WAGNER PEÑA PASMIÑO
JULIA CECILIA YON DELGADO

ISBN: 978-9915-9706-0-8

Teoría matemática realista de Hans Freudenthal: Didáctica y paradigmas de la investigación

Juan Carlos Lázaro Guillermo, Erick Guitton Lozano, Juan Luis Pérez Marín, Milton Juan Carlos Barreda Fachin, Rogger Wagner Peña Pasmiño, Julia Cecilia Yon Delgado

Primera edición: Agosto, 2024

Editado por:

Editorial Mar Caribe

www.editorialmarcaribe.es

Av. General Flores 547, Colonia, Colonia-Uruguay.

Diseño de cubierta: Yelitza Sánchez Cáceres

Libro electrónico disponible en https://editorialmarcaribe.es/teoria-matematica-realista-de-hans-freudenthal-didactica-y-paradigmas-de-la-investigacion/

Formato: electrónico

ISBN: 978-9915-9706-0-8

Sobre los autores y la publicación

Juan Carlos Lázaro Guillermo
jlazarog@unia.edu.pe
https://orcid.org/0000-0002-4785-9344
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, Perú

Erick Guitton Lozano
eguittonl@unia.edu.pe
https://orcid.org/0000-0001-8819-0555
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, Perú

Juan Luis Pérez Marín
jperezm@unia.edu.pe
https://orcid.org/0000-0002-3671-1782
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, Perú

Milton Juan Carlos Barreda Fachin
juan_barreda@unu.edu.pe
https://orcid.org/0000-0001-6947-8078
Universidad Nacional de Ucayali, Perú

Rogger Wagner Peña Pasmiño
rowapepas@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0549-0956
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, Perú

Julia Cecilia Yon Delgado
jyond@unia.edu.pe
https://orcid.org/0000-0003-4119-2072
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, Perú

Libro resultado de investigación:
Publicación original e inédita, cuyo contenido es resultado de un proceso de investigación realizado antes de su publicación, ha sido revisada por pares externos a doble ciego, el libro ha sido seleccionado por su calidad científica y porque contribuye significativamente en el área del saber e ilustra una investigación completamente desarrollada y completada. Además, la publicación ha pasado por un proceso editorial que garantiza su estandarización bibliográfica y usabilidad.

Editorial Mar Caribe

Teoría matemática realista de Hans Freudenthal: Didáctica y paradigmas de la investigación

Uruguay, 2024

ISBN: 978-9915-9706-0-8

Índice

Introducción

Freudenthal fue un apasionado defensor de la reforma de la educación matemática tradicional. Su extensa labor como fundador y participante activo en grupos como el Grupo Internacional de Educación en Psicología y Matemáticas (PME) y la Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM) contribuyó en gran medida a su popularidad. En estos foros expresó su oposición a los enfoques pedagógicos y didácticos que prevalecieron a mediados del siglo XX, como la teoría de objetivos operacionales, las pruebas de evaluación estructuradas, la investigación educativa estandarizada y la aplicación directa del estructuralismo y constructivismo de Piaget en el aula.

También criticó la separación entre la investigación educativa, el desarrollo curricular y la práctica docente, así como la introducción de las matemáticas "modernas" en las escuelas. Las publicaciones de Freudenthal sobre Educación Matemática abarcaron muchos años, durante los cuales colaboró con otros miembros del Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO), que fundó en 1970 en la Universidad de Utrecht. Hoy el instituto se conoce como Instituto Freudenthal. Juntos, los miembros del grupo trabajaron en escuelas, junto con profesores habituales, estudiando el conocimiento informal de los estudiantes y encontrando formas de conectarlo con las actividades y modelos propuestos. Diseñaron y probaron secuencias, mejorándolas continuamente a partir del análisis de su implementación. Este trabajo sentó las bases del enfoque actual conocido como Educación Matemática Realista (EMR).

Hans Freudenthal, matemático y educador de ascendencia alemana, obtuvo su doctorado en la Universidad de Berlín. Sin embargo, debido a su herencia judía, se vio obligado a emigrar de Alemania durante el ascenso del régimen nazi. Encontró refugio en Los Países Bajos, donde continuó su carrera académica y desarrolló sus teorías pedagógicas. Desafortunadamente tuvo que permanecer escondido durante los años de la Segunda Guerra Mundial. Freudenthal creía que el proceso de aprendizaje debería basarse en situaciones que requieren organización.

Criticó a Piaget por intentar imponer el desarrollo psicológico en el sistema de categorías utilizado por los matemáticos, utilizando terminología matemática con diferentes significados. Basándose en sus propias experiencias, Freudenthal sostenía que el aprendizaje estaba más estrechamente relacionado con el desarrollo lingüístico que con el desarrollo cognitivo. Le preocupaba cómo el trabajo de Piaget influyó en los metodólogos de la enseñanza para traducir los hallazgos de la investigación en pautas de instrucción para la educación matemática, transformando esencialmente una teoría epistemológica en una teoría pedagógica.

Mantuvo conversaciones con Chevallart sobre su teoría de la transposición, que creía que se basaba en el conocimiento experto de los matemáticos. Freudenthal argumentó que las matemáticas que se enseñan en las escuelas no deberían reflejar ninguna interpretación de ideas filosóficas o científicas, a menos que fueran de una época mucho anterior.

La oposición de Freudenthal a la psicología, la pedagogía y la didáctica predominantes en la época no carecía de fundamento. Tenía sus raíces en su profundo conocimiento de la disciplina matemática, su pasión por enseñarla y su experiencia de primera mano en el aula. Cuestionó la naturaleza artificial de los objetivos educativos y los dominios de aprendizaje propuestos por Bloom, argumentando que tenían un impacto negativo tanto en las pruebas escolares como en las pruebas de desarrollo. Acusó a Bloom de concebir el aprendizaje como un proceso en el que el conocimiento simplemente se vierte en las cabezas de los estudiantes. De manera similar, no estuvo de acuerdo con la opinión de Gagné de que el aprendizaje es un proceso continuo que progresa desde estructuras simples a estructuras complejas.

Freudenthal creía que el aprendizaje implicaba saltos repentinos de reinvención, demostrados por los estudiantes que experimentaban momentos "ajá", desarrollaban atajos en sus estrategias, cambiaban sus perspectivas y utilizaban modelos de distintos niveles de formalización. Sostuvo que el aprendizaje en realidad pasa de estructuras ricas y complejas del mundo real a las estructuras más generales, abstractas y formales de las matemáticas. Aunque las referencias de Freudenthal a autores no matemáticos fueron limitadas, reconoció influencias de Decroly, cuyos intereses se alineaban con su propia teoría del aprendizaje de las matemáticas en contextos de la vida real, y Dewey, con quien vio similitudes en la idea de reinvención guiada. También se inspiró en Pierre y Dina Van Hiele, incorporando sus niveles de matematización en su trabajo sobre el desarrollo del pensamiento geométrico y su didáctica. Además, estuvo influenciado por la pedagogía fenomenológica de Lagenveld, la didáctica intuitiva de Castelnuovo E., la educación progresista de Petersen, Kry Van Perreren y las teorías socioculturales de Europa del Este.

La Educación Matemática Realista, presentada en este libro, no pretende ser una teoría integral del aprendizaje como el constructivismo, sino que es una filosofía integral (según Freudenthal) que se implementa a través de un conjunto de teorías de enseñanza específicas para temas matemáticos. Las ideas centrales de este enfoque son las siguientes: - Las matemáticas se consideran una actividad humana (lo que Freudenthal denomina matematización) y, por lo tanto, deben ser accesibles a todos. - El desarrollo de la comprensión matemática se produce en diferentes etapas donde los contextos y modelos juegan un papel importante.

Este desarrollo se facilita mediante el proceso de reinvención guiada, dentro de un entorno cognitivo diverso. - Desde una perspectiva curricular, la reinvención guiada de las matemáticas como actividad de matematización requiere el uso de la fenomenología didáctica como metodología de investigación.

Se trata de buscar contextos y situaciones que generen la necesidad de organización matemática. La historia de las matemáticas y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes sirven como fuentes principales para esta búsqueda. Estos conceptos, comúnmente conocidos como Principios de la Educación Matemática Realista, se explican con más detalle a continuación: El Principio de Actividad enfatiza que las matemáticas deben verse como una actividad humana a la que se puede acceder y aprender mediante la participación activa.

Según Freudenthal, enseñar el proceso de la actividad matemática es más importante que enseñar el resultado final. La atención no debe centrarse únicamente en aprender algoritmos o conceptos, sino en el proceso de algoritmización, algebrización, abstracción, formalización y estructuración. De acuerdo con este principio, las matemáticas deben ser accesibles a todos los estudiantes, reconociendo que no todos necesitan seguir carreras en matemáticas. El objetivo es que los estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y de pensamiento crítico para aplicarlas a problemas cotidianos.

El énfasis está en brindar acceso a conocimientos, habilidades y disposiciones a través de situaciones de la vida real, descubriendo los procesos ocultos dentro de los productos matemáticos. Freudenthal se inspira en las actividades de los matemáticos, ya sea en matemáticas puras o aplicadas, que se dedican a la resolución y búsqueda de problemas y a la organización de contenidos relacionados con conceptos matemáticos e información del mundo real.

Capítulo 1

Matemático y Teórico: Hans Freudenthal

A lo largo de su carrera profesional, las perspectivas de Hans Freudenthal sobre la reforma educativa divergieron de casi todos los enfoques contemporáneos. Cuestionó las "nuevas" matemáticas, los objetivos operativos, los rígidos métodos de evaluación, la investigación cuantitativa empírica estandarizada y las estrictas divisiones entre investigación, desarrollo e implementación curriculares. Curiosamente, si bien sus ideas inicialmente fueron vistas como rebeldes, ahora han ganado una aceptación generalizada. Esto sugiere el importante papel que jugó Hans Freudenthal no sólo en la educación matemática sino también en la teoría del currículum y la investigación metodológica.

Además de su reputación como investigador matemático, Freudenthal también profundizó en las tradiciones educativas y psicológicas de Europa y Estados Unidos, haciendo sus propias contribuciones a la educación matemática. Hoy en día, es ampliamente reconocido como uno de los educadores matemáticos más influyentes de su tiempo. En este trabajo pretendemos destacar algunas de las ideas de Freudenthal, aunque es imposible abarcarlas todas. Nos centraremos en la pedagogía y la teoría curricular, explorando aspectos del trabajo de Freudenthal y las teorías que son relevantes desde estas perspectivas.

Existen diferencias notables entre la teoría curricular desarrollada por los educadores de Estados Unidos y Europa, a pesar de los argumentos de que abordan cuestiones similares. Estas diferencias surgen de disparidades fundamentales en los antecedentes culturales, filosóficos e institucionales. En Europa, la teoría pedagógica incluye el concepto de Didáctica, que se considera una forma de humanidades.

Esta perspectiva se basa en la práctica de la educación, centrándose en la educación realista y la teoría fenomenológica de Bildung, que abarca la formación de la personalidad del individuo. Va más allá de la mera transmisión de conocimientos y también enfatiza el desarrollo de normas, valores y habilidades necesarias para ser un "buen" ciudadano o parte de una élite intelectual. Por otro lado, Ausbildung se refiere a la formación profesional y profesional. La didáctica en este contexto se ocupa principalmente de teorías sobre el propósito y el contenido de la educación y la instrucción.

En los Países Bajos, la didáctica está influenciada por la pedagogía fenomenológica de la Geisteswissenschaftliche, como lo ejemplifica el trabajo de Langeveld en la Universidad de Utrecht en 1965. Si bien, esta perspectiva perdió importancia en los años 60 y 70, lo que llevó al reemplazo gradual de una perspectiva general. didáctica con modelos formales de aprendizaje y enseñanza popularizados por psicólogos educativos estadounidenses como Robert Glaser, Robert de Cecco y Benjamin Bloom. A pesar de este cambio, el contenido de la didáctica desarrollada en las facultades e institutos de matemáticas y ciencias de la educación no quedó completamente eclipsado por este movimiento.

A pesar de no mencionar nunca a los estudiantes como Wolfgang Klafki, las preguntas de Freudenthal sobre qué se debe enseñar en las materias escolares, con qué propósito y para quién son similares a las planteadas por Klafki. La creencia de Freudenthal en "las matemáticas como actividad humana" puede verse como una representación de una Geisteswissenschaftliche, una teoría fenomenológica de la educación matemática que se centra en los aspectos prácticos de la enseñanza y la educación en lugar de simplemente transmitir conocimientos matemáticos preexistentes. Algunas de las ideas principales de Freudenthal, como la "reinvención" y su crítica de la "inversión antididáctica" de la instrucción deductiva tradicional, pueden haber sido influenciadas por la educación progresista y el movimiento de reforma pedagógica. Figuras como Peter Petersen y María Montessori probablemente desempeñaron un papel en la configuración de estas ideas.

Según Freudenthal, la teoría curricular no es un conjunto fijo de teorías y propósitos, sino que depende de procesos. El término "plan de estudios" se utiliza a menudo junto con cambio o desarrollo, como desarrollo curricular o desarrollo de investigaciones. Para Freudenthal, la teoría del currículum es un esfuerzo práctico que puede conducir al surgimiento de nuevas ideas teóricas. Él cree que el desarrollo curricular no debería estar dirigido por líderes académicos, sino que debería implicar la colaboración entre profesores y estudiantes en las escuelas. Schwab comparte ideas similares, quien defiende el currículo como "práctica" y desafía la teoría curricular dominante de su época. Como resultado, existen similitudes entre ciertas ramas del enfoque anglosajón de la teoría curricular y la comprensión del currículo de Freudenthal (Gravemeijer y Terwel, 2000).

Sin embargo, en los escritos de Freudenthal suele haber una connotación negativa asociada con el término "curriculum". Describe el movimiento curricular anglosajón dominante como una teoría conductista y verticalista, refiriéndose a ella como "boxología". Por el contrario, Freudenthal presenta su propia perspectiva del currículo como un proceso, al que denomina desarrollo educativo. Mientras que el desarrollo curricular se centra en la creación de materiales curriculares, Freudenthal busca ir un paso más allá promoviendo cambios en la enseñanza en el aula a través del desarrollo educativo.

Por lo tanto, el desarrollo educativo va más allá del diseño instruccional y abarca una innovación estratégica integral. Esta innovación se basa en una filosofía educativa explícita e implica el desarrollo de diversos materiales como parte de la estrategia general. La investigación desempeña un papel crucial a la hora de impulsar todo este proceso, alineándose bien con la tradición pedagógica. Específicamente, se emplea investigación cualitativa e interpretativa, a partir de experiencias docentes en clases individuales. El diálogo entre investigadores, desarrolladores de planes de estudio y profesores ocupa una posición central en este enfoque.

Matemática: actividad humana

Freudenthal era conocido por su oposición a las "nuevas matemáticas" de la década de 1960, que se basaban en las matemáticas modernas y la teoría de conjuntos. Creía en la pedagogía tradicional y criticaba el nuevo enfoque porque creía que descuidaba lo que se debía enseñar y cómo se debía enseñar. Reconoció que las matemáticas se caracterizan por su generalidad y amplia aplicabilidad, pero también vio la abstracción como un problema en la enseñanza. Si bien las matemáticas abstractas son flexibles en un sentido objetivo, pueden no ser útiles para personas que no pueden aplicar esta flexibilidad a sus propias vidas. Freudenthal argumentó que las matemáticas deberían enseñarse como una herramienta útil, pero no simplemente enseñando conceptos matemáticos y luego aplicándolos. Creía que el orden de la enseñanza era importante y que las matemáticas debían enseñarse mediante la matematización. Este enfoque enfatiza el proceso de hacer matemáticas en lugar de centrarse únicamente en el resultado final. En la educación matemática tradicional, el punto de partida es a menudo el resultado de la actividad matemática de otros, lo que Freudenthal vio como una inversión antididáctica. Creía que la enseñanza debería comenzar con la actividad en sí y no con el resultado final.

La búsqueda de las matemáticas implica tanto la resolución de problemas como el establecimiento de una disciplina estructurada. Para resolver eficazmente problemas del mundo real, es necesario organizarlos y abordarlos mediante patrones matemáticos. Asimismo, las matemáticas en sí mismas requieren organización, ya sea organizando resultados nuevos o existentes, ya sean propios o de otros, para mejorar la comprensión. Esto puede implicar explorar nuevas ideas, examinar contextos más amplios o aplicar un enfoque axiomático, como sugirió Freudenthal en 1971.

El enfoque de Freudenthal sobre la matematización incluye tanto "temas de la realidad" como "temas matemáticos", abarcando tanto las matemáticas aplicadas como las matemáticas puras. Esto lo diferencia de otros educadores matemáticos que también enfatizan la actividad matemática pero basan su discurso en el discurso de los investigadores matemáticos puros. La descripción que hace Freudenthal de la actividad matemática como modelo para la educación matemática difiere de la anterior en dos aspectos:

- En primer lugar, incorpora matemáticas aplicadas o el proceso de utilizar las matemáticas para resolver problemas del mundo real.
- En segundo lugar, desplaza el foco de la estructura de la actividad a la actividad misma y sus resultados.
- Además, el concepto de "discurso" se refiere a una práctica social en la que el acto de matematizar otorga una importancia significativa al compromiso mental.

La definición integral de Freudenthal de las matemáticas como un esfuerzo humano se alinea más efectivamente con un discurso práctico, como el que se encuentra en las matemáticas aplicadas. En este tipo de discurso, hay un mayor énfasis en la efectividad y la eficiencia, y menos atención en conjeturas especulativas sin un objetivo claro. Él emplea el término "matematizar" de manera integral, abarcando tanto la organización como la aplicación de principios matemáticos. Al seleccionar la palabra "organizar", Freudenthal transmite que matematizar implica más que simplemente traducir conceptos en un sistema estructurado de símbolos. Además, el acto de organizar el tema en sí debe conducir al desarrollo de una representación simbólica.

La precisión también es un aspecto clave de la matematización. Las matemáticas son conocidas por su precisión y exactitud, y al aplicar el razonamiento matemático, podemos asegurarnos de que nuestras soluciones sean precisas y estén libres de errores. Utilizamos herramientas matemáticas, como fórmulas, ecuaciones y cálculos, para llegar a resultados precisos y confiables. Al matematizar, podemos evitar conceptos erróneos e interpretaciones erróneas, lo que lleva a una comprensión matemática más precisa.

Cuando hablamos de hacer algo "más matemáticamente", nos referimos al proceso de aplicar principios y conceptos matemáticos de una manera que enfatice la generalidad, la certeza, la precisión y la brevedad. La generalidad se refiere a la capacidad de aplicar ideas matemáticas en diversos contextos y situaciones. Al matematizar, podemos reconocer patrones, identificar relaciones y hacer conexiones que se extienden más allá de ejemplos específicos. Esto nos permite resolver una amplia gama de problemas y comprender los principios subyacentes que los rigen. La certeza es otra característica de la matematización.

Al abordar un problema matemáticamente, nos esforzamos por lograr un razonamiento lógico y soluciones basadas en evidencia. Nos basamos en las reglas y principios de las matemáticas para guiar nuestro pensamiento y garantizar que nuestras conclusiones sean confiables y estén bien fundadas. Las matemáticas tienen un lenguaje y un simbolismo únicos que nos permiten expresar ideas y conceptos complejos de manera concisa. Al matematizar, nuestro objetivo es utilizar este lenguaje de manera efectiva, utilizando símbolos, notación y explicaciones concisas para comunicar ideas matemáticas de manera eficiente. Esto permite una comunicación más clara y un enfoque más ágil para la resolución de problemas:

- Por generalidad: generalizaciones (observación de analogías, clasificaciones, estructuras)
- Para establecer certeza, es crucial participar en un proceso de reflexión, justificación y prueba. Esto se puede lograr empleando un enfoque sistemático, que implica desarrollar y probar conjeturas, hipótesis o teorías. Al examinar minuciosamente la evidencia y someterla a un escrutinio riguroso, se puede determinar la validez y confiabilidad de las conclusiones extraídas. Al enfatizar la importancia del pensamiento crítico y el razonamiento lógico, este enfoque sistemático garantiza que la certeza no se suponga simplemente, sino que se fundamente mediante un análisis sólido y riguroso.
- Para garantizar la precisión, es importante utilizar varios métodos, como modelar, simbolizar y definir, para limitar las interpretaciones y evaluar la validez de la información.
- Para mantener la concisión, es fundamental simbolizar y esquematizar, lo que implica crear procedimientos y notaciones estandarizadas.

Cuando se mira desde esta perspectiva, el acto de matematizar objetos matemáticos y el acto de matematizar cuestiones del mundo real tienen características similares. Este es un concepto crucial para Freudenthal, ya que sugiere que la educación de los niños en matemáticas debe centrarse en la aplicación de principios matemáticos a situaciones cotidianas. Los niños no son capaces de matematizar las matemáticas en sí, ya que no tienen experiencia directa con objetos matemáticos. De similar forma, cuando los estudiantes matematizan objetos disciplinarios del mundo real, se familiarizan más con el uso de enfoques matemáticos para resolver problemas en su vida diaria. Esto también se relaciona con la idea de Freudenthal de "encontrar problemas", que implica tener una mentalidad matemática que comprenda las fortalezas y limitaciones del uso de las matemáticas en diferentes situaciones.

La noción de "matematizar la realidad" es un aspecto central del concepto de "matemáticas para todos". Freudenthal reconoce que no todos los estudiantes se convertirán en matemáticos en el futuro, pero enfatiza que las matemáticas que aprenden deben ser aplicables a la resolución de problemas cotidianos. Por lo tanto, es importante priorizar enseñar a los estudiantes cómo abordar la resolución de problemas utilizando métodos matemáticos. Este objetivo se puede combinar con la meta de que los estudiantes apliquen conceptos matemáticos a situaciones que sean relevantes para sus propias experiencias. Desde esta perspectiva, no sorprende que Freudenthal critique fuertemente el concepto de transposición didáctica, propuesto por Chevallard (1985), que se basa en el conocimiento experto de los matemáticos. Freudenthal sostiene que las matemáticas que se enseñan en las escuelas no deberían ser una mera traducción de ideas filosóficas o científicas, a menos que sean de una época mucho anterior (Gravemeijer y Terwel, 2000).

Keitel (1987) sostiene que el objetivo principal es desarrollar un currículo de matemáticas que sea accesible a todos los individuos y al mismo tiempo conserve la esencia de las matemáticas mismas. Para lograrlo, sugiere que los profesores a veces deberían alejarse de los problemas del mundo real y centrarse en los conceptos, estructuras y sistemas que se han establecido y probado dentro de la ciencia matemática. Partiendo del concepto de matematización de Freudenthal, se introduce la idea de matematización horizontal y vertical.

La matematización horizontal implica transformar un problema contextual en un problema matemático, mientras que la matematización vertical implica llevar la disciplina matemática a un nivel superior. La matematización vertical puede fomentarse presentando problemas que tengan soluciones matemáticas en varios niveles de complejidad. Freudenthal (1991) describe esta distinción explicando que la matematización horizontal cierra la brecha entre el mundo real y el reino de los símbolos.

En el mundo real, los individuos viven, actúan y experimentan diversas emociones, mientras que en el mundo simbólico los símbolos se crean, manipulan y comprenden mediante procesos mecánicos, integrales y reflexivos. El mundo real representa lo que se percibe como realidad, mientras que el mundo simbólico representa la abstracción. Sin embargo, los límites entre estos dos mundos no están claramente definidos y pueden fluctuar. Freudenthal enfatiza que la distinción entre matematización horizontal y vertical no es rígida, ya que la percepción de la realidad varía de persona a persona. Define la realidad como una combinación de interpretación y experiencia sensorial, sugiriendo que las matemáticas también pueden ser parte de la realidad de un individuo. El concepto de realidad y lo que se considera sentido común no es fijo, sino que está influenciado por procesos de aprendizaje personal. Por lo tanto, la afirmación de Freudenthal de que "las matemáticas comienzan y permanecen en la realidad" debe interpretarse como un reconocimiento de la naturaleza dinámica de la realidad y su relación con las matemáticas.

En la perspectiva de Freudenthal, los conceptos de "sentido común" y "realidad" son subjetivos y dependen del punto de vista del individuo. Esto significa que la distinción entre matematización vertical y horizontal también debe evaluarse desde la perspectiva del individuo. El hecho de que una actividad matemática específica se considere "vertical" u "horizontal" depende de la naturaleza de la actividad y de la comprensión de las matemáticas por parte de la persona. Por ejemplo, una actividad simbólica puede ser rutinaria para un estudiante, categorizándola como matematización horizontal.

Sin embargo, si la misma actividad simbólica implica un nuevo invento para otro estudiante, se consideraría una matematización vertical. Esto último es más evidente cuando un estudiante reemplaza su método de resolución o forma de describir por un enfoque más sofisticado, organizado y matemático. Estos cambios pueden impulsarse reflexionando sobre los métodos de resolución y profundizando la comprensión. Participar en debates con toda la clase que exploren diferentes métodos de solución, interpretaciones e ideas puede contribuir en gran medida a estos cambios. Así, durante dichas discusiones, los estudiantes pueden descubrir métodos de solución alternativos que sean más ventajosos que los actuales. Esto resalta la importancia del diálogo en la matematización, enfatizando que no es únicamente una actividad individual.

Asimismo, Freudenthal también enfatiza la importancia del trabajo en grupo en la educación matemática. Introdujo por primera vez el concepto de aprendizaje en grupos pequeños en 1945 y más tarde abogó por la educación matemática en grupos diversos. Según Freudenthal, tanto los estudiantes trabajadores como los perezosos pueden beneficiarse del aprendizaje colaborativo. Sorprendentemente, al revisar sus obras desde la década de 1940 en adelante, Freudenthal descubrió que había abogado consistentemente por el aprendizaje cooperativo en grupos pequeños y diversos.

La crítica

La reputación de Freudenthal no se basa únicamente en sus propias ideas teóricas, sino también en su crítica de la investigación "tradicional". En la comunidad de investigación educativa de Los Países Bajos, encontró una fuerte oposición por su postura contra quienes se basaban en una metodología empirista y en complicados análisis estadísticos. Aprovechando su experiencia como matemático, Freudenthal expuso hábilmente las importantes deficiencias en la aplicación de las matemáticas y la estadística en numerosos casos de investigación empírica supuestamente "alta".

La postura de Freudenthal contra gran parte de la investigación educativa surge de su creencia de que las interrupciones en el proceso de aprendizaje son cruciales. Estas perturbaciones pueden verse como atajos u oportunidades para obtener perspectivas diferentes. Según Freudenthal, es a través de estas interrupciones que se puede determinar si un estudiante ha alcanzado un determinado nivel de comprensión. Para identificar estas interrupciones, los estudiantes individuales deben ser monitoreados de cerca. Este enfoque ignora la importancia de los grupos y la eliminación de las perturbaciones individuales. Además, la atención debe centrarse en observar el proceso de aprendizaje en lugar de probar el logro de los objetivos de aprendizaje. En general, Freudenthal argumentó que los métodos de investigación tradicionales no podían abordar adecuadamente las preguntas educativas sobre el propósito y el público objetivo de un tema en particular.

Freudenthal expresó más preocupaciones y objeciones hacia el movimiento de pruebas y ofreció una segunda ronda de críticas. Su escepticismo giraba principalmente en torno a los métodos empleados en las pruebas y criticaba duramente el impacto perjudicial que los exámenes y las técnicas de prueba tenían en el campo de la educación. El quid de su crítica se centró en la falta de comprensión sobre el tema que se estaba probando y el excesivo énfasis puesto en la confiabilidad, sin tener en cuenta la importancia de la validez. Es evidente que Freudenthal no compartía la misma perspectiva positiva y entusiasmo que los defensores de las pruebas objetivas.

En un sentido más amplio, la crítica de Freudenthal a la investigación educativa se centra en metodólogos que poseen un amplio conocimiento sobre los métodos de investigación pero carecen de comprensión de la educación misma. Se opone vehementemente a la división entre contenido y forma, argumentando que este enfoque da como resultado modelos vacíos que requieren expertos para llenarlos de sustancia educativa. Estos modelos no consideran si el contenido realmente se alinea con los principios educativos (Gravemeijer y Terwel, 2000). Además, expresa objeciones comparables hacia las teorías educativas integrales.

Según Freudenthal, las teorías generales de la educación no se alinean con las necesidades específicas de la educación matemática e incluso pueden ser perjudiciales para el tipo de educación que pretenden apoyar. Critica específicamente las teorías educativas propuestas por Bloom, Gagné y Piaget. Freudenthal sostiene que la Taxonomía de objetivos educativos de Bloom no es adecuada para la educación matemática porque se centra en la clasificación más que en el proceso activo de estructuración de la realidad. Él cree que los estudiantes obtienen control sobre la realidad a través de este proceso de estructuración, y las categorías artificiales de la Taxonomía de Bloom tienen un impacto negativo tanto en las pruebas escolares como en las de desarrollo.

También rechaza la estrategia de aprendizaje de dominio de Bloom, acusándola de tratar el aprendizaje como un proceso pasivo de transferencia de conocimiento. De manera similar, no está de acuerdo con el concepto de análisis de tareas de Gagné, ya que no se alinea con su visión de las matemáticas como una actividad humana. Freudenthal se pregunta si las matemáticas son realmente tan diferentes de otras disciplinas y expresa el deseo de que alguien con conocimientos tanto de matemáticas como de psicología cierre esta brecha.

Mientras Gagné ve el aprendizaje como una progresión continua desde estructuras simples a complejas, Freudenthal lo ve como un proceso discontinuo desde las estructuras ricas y complejas de la vida cotidiana hasta las estructuras abstractas de las matemáticas simbólicas. Cree que los puntos de partida para el aprendizaje deben ser situaciones que requieran organización y que los alumnos deben desarrollar sus propias categorías en función de sus necesidades.

Freudenthal también critica a Piaget por su enfoque de las matemáticas y sus experimentos. Sin embargo, lo que más le preocupa es cómo la obra de Piaget influye en las metodologías de enseñanza al basar sus prácticas en teorías que han aprendido de un psicólogo. Sostiene que estas metodologías a menudo malinterpretan o malinterpretan las presuposiciones matemáticas de Piaget en lugar de basarse en los hallazgos reales de sus experimentos.

En su trabajo, Freudenthal profundiza en el concepto de constructivismo y ofrece tanto crítica como apoyo a esta epistemología. Si bien critica la epistemología constructivista como observador, sostiene que su propia perspectiva como actor se alinea con esta epistemología. Específicamente, ve las matemáticas desde la perspectiva de un matemático en activo y las caracteriza como una forma bien desarrollada de sentido común, que está estrechamente vinculada a su idea de una "realidad ampliada". En términos de educación, Freudenthal tiene como objetivo garantizar que las experiencias de los estudiantes les ayuden a internalizar el conocimiento matemático y verlo como una extensión perfecta de sus experiencias de la vida cotidiana. Con base en esto, se puede inferir que Freudenthal está en realidad más alineado con el constructivismo de lo que parece inicialmente, a pesar de sus críticas al mismo.

La perspectiva de Freudenthal sobre la educación matemática enfatiza la importancia de ver las matemáticas como algo más que una simple serie de pasos o procedimientos, sino más bien como un esfuerzo humano dinámico. Si bien, es crucial reconocer que participar en esta actividad también produce conocimientos y conceptos matemáticos. En consecuencia, esto plantea la cuestión de cómo diseñar una educación matemática que combine efectivamente estos dos aspectos. Para abordar esto, Freudenthal propuso varios conceptos, incluidos los conceptos de "invención guiada", "niveles de procesos de aprendizaje" y "fenomenología didáctica", todos los cuales ofrecen ideas valiosas para abordar este desafío.

La reinvención

Según el principio de reinvención, el proceso de aprendizaje puede estructurarse de manera que permita a los estudiantes encontrar y comprender las matemáticas. El desarrollo del plan de estudios comienza con una idea o concepto y, a través de la experimentación y la resolución personal de problemas, los estudiantes pueden llegar a sus propias soluciones. El estudio de la historia de las matemáticas puede servir como una herramienta útil en este proceso, guiando a los estudiantes a lo largo del viaje de aprendizaje.

Este enfoque, conocido como "reinvención guiada", enfatiza la importancia del proceso de aprendizaje en sí en lugar de simplemente adquirir conocimientos. Alienta a los estudiantes a apropiarse del conocimiento que adquieren y a sentirse responsables de él. Para facilitar esto, se debe brindar a los estudiantes la oportunidad de construir sus propias bases de conocimiento matemático basándose en sus experiencias de aprendizaje. Freudenthal sugiere que la historia de las matemáticas puede ser una fuente de inspiración para los estudiantes y que el principio de reinvención también puede verse influenciado por métodos de solución informales. A menudo, las estrategias informales de los estudiantes pueden verse como anticipaciones o precursoras de procesos formales.

Este proceso de matematización, similar a la búsqueda de soluciones, es una forma de reinvención. Al seleccionar problemas contextuales para los estudiantes, es importante elegir aquellos que permitan una variedad de métodos de solución, preferiblemente aquellos que reflejen una posible ruta de aprendizaje.

Freudenthal cree que el enfoque inventivo de la enseñanza es una expansión del método socrático. Se refiere a los "experimentos mentales" como una forma de ilustrar esto, donde los autores de libros de texto se imaginan interactuando con los estudiantes e imaginando sus posibles reacciones y resultados. Estos experimentos planificados implican anticipar las reacciones de los estudiantes y diseñar estrategias para abordarlas. El objetivo es que los estudiantes reinventen el tema de enseñanza a través de la interacción y el compromiso. Freudenthal comenta que si bien la actividad de los estudiantes en el método socrático es ficticia, deben sentir que su comprensión e ideas se desarrollan durante el proceso de enseñanza, con el maestro sirviendo de facilitador.

Para Freudenthal, el método socrático brinda a los estudiantes un papel más activo en el proceso de construcción de su propio conocimiento. Sin embargo, existe una similitud entre ambos enfoques a la hora de anticipar y planificar posibles caminos de aprendizaje. Esta idea de anticipación y planificación se discute en relación con diversos desafíos que deben abordarse, como la actividad mental de los estudiantes y las acciones necesarias que deben ocurrir para que el proceso de reinvención sea factible.

Freudenthal amplía la idea de reinvención introduciendo el concepto de "matematización progresiva". Este concepto involucra tanto la perspectiva de reinvención del observador como la perspectiva del estudiante de experimentar la "matematización progresiva" como actor. Los estudiantes comienzan matematizando un tema del mundo real y luego pasan a analizar su propia actividad matemática. Este paso es crucial ya que incluye un componente vertical, explicado por Freudenthal en relación con la teoría de

Van Hiele, que establece que la actividad en un nivel se convierte en objeto de análisis en el siguiente nivel.

El cambio de "operador" a "objeto" significa la transición de un enfoque basado en procedimientos a un enfoque en el objeto mismo, como lo observa Sfard (1995) en el desarrollo histórico de las matemáticas y la materialización descrita por Ernest (1991). La teoría de niveles de Freudenthal forma la base de la educación matemática realista (EMR), que enfatiza el surgimiento de modelos operativos en la resolución de problemas situacionales y su transformación gradual en entidades que sirven como modelos para el razonamiento matemático formal (Gravemeijer y Terwel, 2000).

La fenomenología en la didáctica

Freudenthal enfatiza la importancia de hacer coincidir los objetos matemáticos con los fenómenos del mundo real que representan. En contraste con el enfoque de adquisición de conceptos, que implica el uso de materiales tangibles para encarnar conceptos, él sugiere utilizar situaciones fenomenológicamente ricas: situaciones que están organizadas de manera sistemática. En este enfoque, la selección de situaciones debe hacerse cuidadosamente para garantizar que puedan organizarse y comprenderse utilizando los objetos matemáticos que los estudiantes están aprendiendo a construir.

El objetivo final es explorar cómo el "objeto de pensamiento" (nooumenon) describe y analiza el "fenómeno" de una manera que lo haga accesible para el cálculo y las actividades de pensamiento. Este tipo de análisis fenomenológico constituye la base de una fenomenología didáctica que profundiza en la perspectiva educativa del análisis fenomenológico. Por ejemplo, para que los estudiantes comprendan el concepto de longitud como un objeto matemático, deben enfrentarse a situaciones en las que la longitud es un principio organizador.

En el marco de la didáctica fenomenológica, es necesario investigar la idoneidad de situaciones donde se aplica un tema matemático particular, con el fin de determinar su potencial impacto en el proceso de matematización progresiva. Si entendemos las matemáticas como un medio práctico de resolución de problemas, es razonable esperar que las aplicaciones actuales de las matemáticas impliquen problemas que destaquen estos procesos. Por tanto, las matemáticas formales pueden verse como un proceso de generalización y formalización de conceptos y procedimientos de resolución de problemas en diversas situaciones. El objetivo de la investigación fenomenológica, por lo tanto, es identificar situaciones problemáticas que puedan generalizarse y descubrir situaciones que provoquen procedimientos de solución paradigmáticos, que sirvan como base para la matematización vertical. Al identificar fenómenos que pueden matematizarse, podemos comprender mejor cómo fueron concebidos originalmente.

Al considerar la investigación, Hans Freudenthal a menudo se preguntaba cuál era su propósito, y siempre llegaba a la conclusión de que el propósito era lograr un cambio. La educación debe adaptarse continuamente a la sociedad en constante cambio a la que sirve. Por lo tanto, el concepto de "cambio" es más preferible que el de "reforma", ya que lo que constituye una mejor educación depende de las necesidades y prioridades de la sociedad en un momento dado y de cómo evoluciona la sociedad.

La educación debe cambiar en consecuencia. En este sentido, una función importante del investigador es trazar el camino del cambio. Freudenthal creía que la investigación no debería desconectarse del aula, a diferencia de la investigación tradicional. Más bien, la búsqueda del camino del cambio debería comenzar en el aula. Esta filosofía de los objetivos y funciones de la investigación guió el enfoque de la investigación en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO), dirigido por Freudenthal.

En el momento de la creación de la IOWO, el modelo predominante en la comunidad educativa alemana era el modelo de I+D. Este modelo enfatizaba una separación entre el desarrollo y la implementación del currículo, lo que contradecía el enfoque de Freudenthal sobre el "desarrollo educativo". El concepto de desarrollo educativo, tal como lo vio Freudenthal, abarcaba no sólo el desarrollo curricular sino también el objetivo final de cambiar la práctica educativa. Así, el desarrollo educativo implicó anticipar la implementación del plan de estudios desde el principio, así como elegir un enfoque integral del cambio que abarcara la capacitación docente, el asesoramiento, las pruebas de desarrollo y la formación de opiniones, todo ello basado en la misma filosofía educativa.

En contraste con el movimiento curricular, Freudenthal integró investigación, desarrollo, implementación y difusión. Como resultado de este enfoque, abogó por la implicación de todos los actores desde el inicio, bajo la consigna de "un desarrollo educativo en diálogo con el campo". El tipo de cambio que Freudenthal propugnaba estaba arraigado en su creencia de que las matemáticas son una actividad humana. Si bien, en el momento en que se lanzó la IOWO, se habían realizado pocas investigaciones sobre este tipo de educación matemática. Por lo tanto, las cuestiones sobre cómo desarrollar la instrucción debían abordarse durante el proceso de desarrollo mismo.

La investigación para el desarrollo

Al principio, nuestro matemático se mostró reacio a etiquetar el trabajo de la IOWO como investigación. Creía que estaban observando como ingenieros, no como investigadores. Sin embargo, más tarde se dio cuenta de que esta perspectiva separaba la investigación del desarrollo educativo y no lograba captar la naturaleza interconectada del desarrollo en la "investigación del desarrollo". Según él, el nuevo conocimiento debe estar justificado por el proceso mediante el cual se adquirió.

La esencia de la investigación sobre el desarrollo radica en hacer que el proceso cíclico de desarrollo e investigación se experimente conscientemente y se informe con claridad. Esto permite que otros, como los profesores, vuelvan sobre los pasos del investigador en el proceso de aprendizaje. Freudenthal enfatiza la importancia de estar constantemente consciente del proceso de desarrollo para garantizar la "rastreabilidad". Para que los resultados de la investigación del desarrollo sean creíbles y transferibles, se debe informar la reflexión sobre el proceso de desarrollo.

El investigador debe realizar experimentos mentales para comprender cómo progresan los procesos de enseñanza y aprendizaje y luego encontrar evidencia en experimentos de enseñanza para validar sus expectativas. La retroalimentación de la experiencia práctica debería impulsar una interacción entre el desarrollo y la investigación. Las ideas desarrolladas en papel deben ponerse en práctica inmediatamente y los acontecimientos en el aula deben analizarse y aplicarse consistentemente para desarrollar aún más el trabajo.

Este proceso de deliberación y prueba debería dar como resultado un producto que esté fundamentado tanto teórica como empíricamente. Según Freudenthal, la investigación sobre el desarrollo puede proporcionar a los profesores un marco para informar sus propias decisiones. Dentro de este marco, los docentes pueden desarrollar trayectorias de aprendizaje hipotéticas que consideren la situación actual del aula, así como sus propios objetivos y valores. Los profesores pueden utilizar este marco como punto de partida, firmemente arraigado en la tradición didáctica europea, para guiar su enseñanza.

Las investigaciones realizadas sobre evaluaciones nacionales han revelado que los estudiantes de Los Países Bajos en los últimos años de la escuela primaria tienden a lograr niveles más altos de éxito cuando interactúan con textos modernos en comparación con los tradicionales. Sin embargo, es importante señalar que esta tendencia no se aplica a temas como las mediciones y los algoritmos escritos. Estos hallazgos sugieren que el enfoque estratégico de incorporar el desarrollo educativo en diálogo con el campo, tal como se implementó en la introducción del plan de estudios y los libros de texto escolares holandeses, es la fuerza impulsora detrás de este resultado positivo. De hecho, estudios retrospectivos que examinan las innovaciones en la educación matemática tanto en la escuela primaria como en la secundaria han identificado varios factores clave que contribuyen a este éxito.

Un aspecto clave de este plan implicaría la revisión y renovación de los libros de texto utilizados en educación matemática. Estos libros de texto se revisarían y actualizarían cuidadosamente para alinearse con la nueva filosofía de la educación matemática, incorporando enfoques de enseñanza innovadores y contenido atractivo. Además, se llevaría a cabo una revisión exhaustiva de los exámenes para garantizar que evalúen con precisión la comprensión y el dominio de los conceptos matemáticos de los estudiantes. Esto implicaría revisar el formato y el contenido de los exámenes, así como incorporar preguntas más abiertas y de resolución de problemas que promuevan el pensamiento crítico y la aplicación del conocimiento matemático. Finalmente, la investigación y el desarrollo desempeñarían un papel crucial a la hora de impulsar la innovación en la educación matemática.

Al perfeccionar y mejorar continuamente el campo de la educación matemática, se garantizaría un enfoque dinámico y con visión de futuro para la enseñanza y el aprendizaje. Para lograr mejoras significativas y duraderas en la educación matemática, es necesario implementar un plan integral y ambicioso. El plan abarcaría varios componentes clave, incluido el establecimiento de una filosofía sólida y transformadora de la educación matemática que empodere e inspire tanto a estudiantes como a profesores. Asimismo, implicaría la creación y el refinamiento de una amplia gama de secuencias de instrucción, ejemplos y prototipos que involucren efectivamente a los estudiantes y faciliten su comprensión de los conceptos matemáticos.

Estos materiales educativos se desarrollarían y actualizarían continuamente para reflejar los últimos avances en técnicas pedagógicas e investigación educativa. Y, el establecimiento de una comunidad de educación matemática serviría como una infraestructura mediadora vital, facilitando el intercambio de mejores prácticas, recursos e ideas entre los educadores. La comunidad proporcionaría una plataforma para el diálogo y la colaboración, promoviendo la difusión de estrategias y enfoques de enseñanza innovadores. Para apoyar la implementación de este plan, se organizarían actividades de profesionalización para mejorar las habilidades y conocimientos de los educadores de matemáticas. Lo que brinda oportunidades para el desarrollo profesional continuo, así como fomentar la colaboración y la creación de redes dentro de la comunidad de educación matemática. Para garantizar la adopción e implementación generalizada de estas mejoras, se harían esfuerzos para aumentar la accesibilidad y disponibilidad de recursos de educación matemática de alta calidad. Brindando capacitación y apoyo integrales a los docentes que ya están en servicio, así como desarrollar y difundir publicaciones que muestren métodos y estrategias de enseñanza eficaces.

El desarrollo de la investigación desempeña un papel crucial a la hora de impulsar las estrategias de innovación. Su objetivo principal es generar prototipos y teorías que sirvan como recursos valiosos para formadores de docentes, autores de libros de texto y consultores escolares. Estos intermediarios, a su vez, facilitan la comunicación efectiva entre investigadores y profesores. El principio fundamental que guía el desarrollo educativo es el concepto de entablar un diálogo significativo con aplicaciones prácticas. Significando que el Instituto pone gran énfasis en involucrar a diversas partes interesadas, incluidos formadores de docentes, consultores, autores de textos, investigadores, diseñadores de pruebas y los propios docentes, en el proceso de investigación y desarrollo desde el principio. En lugar de aislarse en una torre de marfil, el Instituto reconoce la importancia de incorporar conocimientos y experiencias del mundo real en sus esfuerzos innovadores.

No es tarea fácil ubicar la obra de Freudenthal en los contextos de la didáctica y los estudios curriculares debido a su estilo de escritura único, que carece de referencias a los autores que lo han influido. Cuando se trata de didáctica, Freudenthal utiliza a menudo este término para describir los procesos correctos de enseñanza y aprendizaje, que él cree que deben estar arraigados en la realidad. Rechaza firmemente el enfoque deductivo, al que denomina "la conversión antididáctica".

Según Freudenthal, la didáctica tiene que ver con los procesos involucrados en la educación. Esto se alinea con el uso que hace Klafki del mismo término, ya que ambos se inspiran en la teoría fenomenológica de Bildung como reforma pedagógica. Ambos parten de la práctica de la educación como base y se esfuerzan por superar los aspectos excluyentes y elitistas de la teoría Bildung en ciertos momentos de sus vidas profesionales. Ambos enfatizan el lado práctico de la educación y abogan por la escolarización integral como una reforma necesaria. Sin embargo, Klafki se centra principalmente en las lecciones planificadas y la preparación de lecciones, donde el proceso de aprendizaje puede no ser del todo real. Las preguntas fundamentales de

Klafki giran en torno al contenido de Bildung, mientras que él presta menos atención a los métodos y procesos de enseñanza.

Freudenthal menciona el término "curriculum", aunque no lo utiliza con tanta frecuencia como la palabra "didáctica". En lo que respecta a su perspectiva sobre el desarrollo curricular y el papel de la teoría, existe un parecido notable con el trabajo de Joseph Schwab, quien ocupa una posición importante en la teoría curricular estadounidense. En una línea similar, pero sin ninguna influencia de Schwab, Freudenthal destaca la naturaleza única del trabajo curricular y la importancia del diálogo entre los expertos en currículo y los profesores.

Él se opone firmemente a la idea de un sistema curricular rígido y rechaza firmemente el concepto de empaquetar y organizar contenidos en estructuras predeterminadas. Este punto de vista es particularmente digno de mención en una época en la que la teoría curricular estaba influenciada predominantemente por un enfoque conductual, y el método de I+D (Investigación, Desarrollo y Difusión) era aclamado como la solución definitiva en Alemania y Los Países Bajos.

Asimismo, Freudenthal aboga por que las matemáticas sean vistas como una actividad humana y fomenta la reinvención guiada. Esta filosofía de reforma humanista, práctica, orientada a procesos, fenomenológica y pedagógica, que se analiza ampliamente en el contexto del desarrollo curricular, distingue la postura de Freudenthal de la de muchos de sus contemporáneos en el campo de la educación matemática. Sus creencias a menudo chocaban con las de psicólogos de orientación conductista como Bloom y los partidarios del movimiento de las "nuevas matemáticas", que proponían el desarrollo de un plan de estudios para matemáticas basado en un sistema deductivo abstracto.

Freudenthal, que fue educado en la tradición alemana de Bildung e influenciado por ella, rechaza la idea de una forma exclusiva de educación reservada para un grupo de élite separado de las masas. En cambio, aboga firmemente por "matemáticas para todos" y se esfuerza por hacer que las matemáticas sean accesibles para todos los individuos. Condena cualquier forma de ajustarse a las normas sociales y alinearse con los efectos inevitables de los conceptos matemáticos.

Cree firmemente que los estudiantes con distintos niveles de capacidad en los primeros años de la educación secundaria, que normalmente tiene entre 12 y 15 años en el contexto holandés, no sólo deberían estar en la misma clase sino también seguir el mismo plan de estudios. Consistente con sus creencias pedagógicas, enfatiza la importancia de formar grupos de aprendizaje diversos. Muchas de las ideas de Freudenthal siguen siendo objeto de debates continuos.

Los psicólogos, que ven el aprendizaje como un proceso informativo, se oponen firmemente a las teorías educativas de esta naturaleza. De manera similar, hay casos de oposición dentro de la comunidad de educación matemática a la idea fundamental de que los estudiantes deben hacer la transición del mundo real al mundo de las matemáticas. Los críticos argumentan que partir de experiencias de la vida real y reinventar conceptos matemáticos es una pérdida de tiempo. Sin embargo, es importante señalar que quienes se oponen a las ideas de Freudenthal tienen evidencia empírica limitada para respaldar su punto de vista. Varias experiencias docentes han demostrado el valor del enfoque de Educación Matemática Realista (EMR). Además, numerosos estudios que investigan los efectos del plan de estudios de matemáticas influenciado por las ideas de Freudenthal han demostrado que aprender matemáticas en contextos de la vida real y dentro de diversos grupos es factible y eficaz.

El impacto de las ideas de Freudenthal es evidente en todos los textos holandeses. Además, existe evidencia práctica y empírica que respalda la viabilidad y eficiencia del enfoque EMR. Uno de los argumentos más convincentes de Freudenthal a favor de la EMR es que no todos los estudiantes se convertirán en matemáticos en el futuro; en cambio, necesitarán principalmente habilidades matemáticas que les ayuden a resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.

Capítulo 2

La educación matemática realista

Las matemáticas están interconectadas con el mundo y la imagen de un matemático está moldeada por las percepciones sociales. La perspectiva se refleja ahora en los planes de estudio de muchos países y en las evaluaciones del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA). La alfabetización matemática, según PISA, es la capacidad de un individuo para reconocer y comprender el papel de las matemáticas en el mundo, emitir juicios matemáticos informados y utilizar las matemáticas de una manera que satisfaga sus necesidades presentes y futuras como ciudadano responsable y reflexivo.

Esta visión enfatiza la importancia de las matemáticas en la sociedad y su aplicación práctica en diversos contextos. La influencia de Freudenthal se extiende más allá de su carrera académica. Desempeñó un papel importante en el Grupo Internacional de Educación en Psicología y Matemáticas, la revista Estudios Educativos en Matemáticas y la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas. A través de sus numerosos escritos, expresó su oposición a los enfoques pedagógicos y didácticos que surgieron a mediados del siglo XX, incluida la taxonomía de Bloom, las evaluaciones estructuradas, los métodos cuantitativos en la investigación educativa, la aplicación directa de las ideas de Piaget en el aula, la separación entre la investigación educativa, desarrollo curricular y práctica docente, y la introducción de matemáticas modernas o establecidas en las escuelas.

La Educación Matemática Realista (EMR) es un enfoque educativo desarrollado desde finales de la década de 1960 por Hans Freudenthal y sus colegas en el Instituto

Freudenthal para la Educación en Matemáticas y Ciencias de la Universidad de Utrecht en Los Países bajos. Hans Freudenthal, un destacado matemático especializado en topología, álgebra e historia de las matemáticas, se vio obligado a emigrar desde Alemania debido al ascenso de los nazis. En Los Países Bajos se dedicó a promover cambios en la enseñanza de las matemáticas no sólo dentro del país sino también en otras naciones europeas.

Freudenthal publica sobre educación matemática desde 1948. A lo largo de los años, trabajó con el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO), que fundó en 1970 en la Universidad de Utrecht, junto con otros colaboradores. Este instituto ha sentado las bases para el actual desarrollo y expansión del programa de Materiales y Recursos Educativos (EMR). Treffers (1987) describe los principios en los que se basa la EMR:

- Los principios incluyen un enfoque en la exploración fenomenológica, donde los estudiantes están expuestos a fenómenos ricos y significativos para desarrollar una comprensión intuitiva de los conceptos matemáticos.
- También se enfatiza el uso de modelos y símbolos, a medida que los estudiantes avanzan desde nociones informales y ligadas al contexto hacia ideas matemáticas más formales.
- Las construcciones y producciones propias de los estudiantes son valoradas y utilizadas en el proceso de enseñanza, ya que sus experiencias personales contribuyen al aprendizaje significativo.
- La interacción es otro aspecto clave, ya que los estudiantes pueden comparar y contrastar sus aportaciones, reflexionando sobre el proceso de matematización.

- Asimismo, es importante el entrelazamiento de ejes y temáticas curriculares, ya que en la enseñanza de temas específicos se consideran las conexiones entre diferentes áreas de la matemática. Por ejemplo, a la hora de enseñar estadística se tienen en cuenta los conocimientos algebraicos o científicos necesarios, y al introducir la noción de distribución se vincula con otros conceptos estadísticos.

Durante una presentación dirigida a educadores en el campo de las matemáticas, Freudenthal, afirma que las matemáticas implican la resolución de problemas y la organización de objetos de estudio, que pueden ser fenómenos del mundo real que requieren la organización de patrones matemáticos para resolver problemas. Alternativamente, pueden ser cuestiones matemáticas, ya sean resultados nuevos o antiguos, propios o ajenos, que necesitan organizarse con nuevas ideas para lograr una mejor comprensión en un contexto más amplio o mediante un enfoque axiomático. Él continúa analizando cómo a los niños inicialmente se les enseñan matemáticas como una actividad, pero a medida que maduran, a menudo se les presenta un sistema matemático preconstruido y bien organizado bajo el supuesto de que los individuos racionales comprenderán los sistemas deductivos. Sin embargo, este enfoque no es eficaz.

Para Freudenthal, transmitir matemáticas prefabricadas, que son producto de matemáticos o autores de libros de texto, es contraproducente en términos de enseñanza. En cambio, sugiere enseñar a los estudiantes a matematizar. Treffers (1987) amplía aún más este concepto al diferenciar entre dos dimensiones de la matematización: horizontal y vertical. La matematización horizontal implica transformar un problema del mundo real en un problema matemático utilizando el sentido común, la intuición, la observación, la aproximación empírica y la experimentación inductiva.

Por otro lado, la matematización vertical implica navegar dentro del ámbito de la realidad matemática a través de la esquematización, la generalización, la prueba, el rigor y la simbolización. La matematización horizontal conduce del mundo de la vida al mundo de los símbolos, donde los individuos viven, actúan y experimentan, mientras que la matematización vertical implica la creación, recreación y manipulación de símbolos de forma mecánica, integral y manera reflexiva (Zolkower y Bressan, 2012). Es importante señalar que los límites entre estos dos mundos no están claramente definidos y pueden expandirse o contraerse dependiendo de varios factores.

Para enseñar a los estudiantes cómo aplicar conceptos matemáticos a situaciones de la vida real, es importante involucrarlos en actividades guiadas que impliquen organizar problemas realistas. Los términos "realista" y "realidad" se utilizan en este contexto para referirse a situaciones que se alinean con el sentido común y se perciben como genuinas dentro de un escenario determinado.

En los primeros grados, nos centramos en contextos familiares cotidianos y situaciones que involucran números, como personas que suben y bajan de un autobús. A medida que los estudiantes se familiarizan más con los números y sus relaciones, se amplía su comprensión de lo que es real o significativo para ellos. Es importante señalar que el término "realista" a menudo se malinterpreta en un sentido limitado, lo que se debe en gran medida a la elección de este nombre. En holandés, "zich realis-eren" significa imaginar. Por tanto, en un sentido más amplio, una situación se considera realista siempre que se presente al individuo como factible, razonable o imaginable. Por ejemplo, cuando enseñamos geometría y medidas, estimaciones, razones y proporciones, podemos inspirarnos en obras de ficción como "Los viajes de Gulliver".

El objetivo de la educación matemática, según Freudenthal, es desarrollar en los estudiantes una disposición matemática que incluya diversas habilidades y destrezas. Esto incluye la capacidad de identificar los aspectos esenciales de una situación, problema, procedimiento, algoritmo, simbolización o sistema axiomático. También implica reconocer características, analogías e isomorfismos comunes, así como proporcionar ejemplos de ideas generales y descubrir nuevos objetos y operaciones.

Se debe alentar a los estudiantes a encontrar atajos, desarrollar nuevas estrategias, inventar nuevas simbolizaciones y reflexionar sobre su propio pensamiento considerando diferentes perspectivas o puntos de vista. Además, la disposición matemática incluye el uso de lenguaje funcional y variables convencionales, determinar el nivel apropiado de precisión para un problema determinado, identificar estructuras matemáticas en un contexto y reconocer cuándo no es relevante o apropiado usar las matemáticas. Por lo tanto, los estudiantes deben considerar su propia actividad como objeto de reflexión para avanzar en su comprensión a un nivel superior.

Para desarrollar esta mentalidad es necesario pasar por un proceso de enseñanza-aprendizaje que implica una reinvención guiada, como lo describe Freudenthal (1991). El objetivo de este proceso no es simplemente enseñar matemáticas, sino más bien enseñar a los estudiantes cómo pensar matemáticamente, cómo abstraer conceptos, cómo crear esquemas, cómo formalizar fórmulas, cómo algoritmizar procedimientos y cómo expresar ideas matemáticas en lenguaje verbal. forma.

Este enfoque de la enseñanza, conocido como reinvención guiada, se basa en los principios de la fenomenología didáctica, que implica buscar contextos de la vida real y situaciones problemáticas que fomenten el pensamiento matemático. Al examinar las formas en que se utilizan y entienden los objetos matemáticos en el lenguaje y las situaciones cotidianas, los educadores pueden desarrollar teorías localizadas para enseñar estos conceptos.

La fenomenología didáctica se basa tanto en la Historia de las Matemáticas, considerando los momentos cruciales en el desarrollo de las ideas matemáticas y su evolución en el tiempo, como en los pensamientos y creaciones únicos de los propios estudiantes. Así, el enfoque de EMR (Enseñanza y Matematización de la Realidad) considera el aprendizaje como un proceso no lineal que involucra niveles progresivamente más altos de organización, abstracción, generalización y formalización.

La transición de un nivel de aprendizaje a otro, que normalmente ocurre de repente y significa una interrupción en el aprendizaje, implica el uso de un modelo para simbolizar una situación. Poco a poco, este modelo se desprende de la situación original y se convierte en una herramienta para organizar situaciones similares. Hay cuatro niveles involucrados en esta distinción entre un modelo de y un modelo para: situacional, referencial, de generalización y formal.

- En el nivel situacional, las estrategias se desarrollan espontáneamente para organizar la situación problemática.
- El nivel referencial introduce modelos gráficos, notaciones y procedimientos que representan el problema pero que aún están conectados con la situación específica.
- El nivel general se alcanza a través de la exploración, la reflexión y la generalización, lo que se aleja de cualquier referencia al contexto.
- Finalmente, el nivel formal implica trabajar con procedimientos y notaciones generales y convencionales que están desconectados de sus contextos originales.

Para fomentar estos procesos, es importante trabajar en problemas que puedan resolverse utilizando diferentes herramientas y fomentar el uso de múltiples estrategias y procedimientos. De modo que, el trabajo de los estudiantes en estos problemas puede revelar su comprensión y habilidades aritméticas en un momento particular, lo cual es valioso para tomar decisiones de instrucción. Esta información no sólo ayuda a tomar decisiones a pequeña escala sino que también orienta decisiones a mayor escala. La comprensión colectiva de la clase y las estrategias de resolución de problemas proporcionan una instantánea de su trayectoria de aprendizaje. Las estrategias utilizadas por los estudiantes individualmente ofrecen información sobre el largo viaje que emprenderá la clase. Lo que sucede en el aula en un momento dado deja entrever lo que está por venir y lo que está por venir.

Los Contextos

El contexto se refiere a un aspecto específico de la realidad que se matematiza durante un proceso de aprendizaje, no son disfraces artificiales para el contenido matemático, sino más bien situaciones de la vida real que los diseñadores del currículo y los profesores presentan a los estudiantes para animarlos a aplicar conceptos matemáticos. Freudenthal sostiene que ver el contexto como una distracción del mensaje matemático es un error, ya que el contexto en sí es el mensaje y las matemáticas son la herramienta utilizada para comprenderlo.

Cuando un contexto es significativo para un estudiante, sirve como punto de partida para su actividad matemática, aprovechando su sentido común y sugiriendo el uso de estrategias informales relevantes para la situación. Es importante señalar que el realismo de un contexto depende de la experiencia previa del estudiante y de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo. Por ejemplo, a un estudiante de primer grado puede resultarle tan "real" trabajar con situaciones que implican cambios en el número de pasajeros de un autobús durante diferentes rutas como más tarde le resultaría trabajar con flechas como símbolos que representan dichos cambios en situaciones posteriores. años.

Tales contextos allanan el camino para conceptos matemáticos de nivel superior, como operadores y ecuaciones. Streefland (1991) apoya esta idea al describir un proyecto de investigación sobre la enseñanza de fracciones que comienza con el concepto de fracción y razón simultáneamente mediante la matematización de situaciones que involucran una distribución igual, como distribuir 5 barras de chocolate entre 6 niños.

Los contextos realistas cumplen dos funciones: primero, como recurso para generar ideas matemáticas y segundo, como dominio para aplicar conceptos matemáticos. Al utilizar situaciones significativas de la vida real como punto de partida, los estudiantes pueden cerrar la brecha entre la realidad y las matemáticas a través de interacciones con sus compañeros, la orientación del maestro y el uso de modelos apropiados que surgen de su propio pensamiento. Este enfoque permite a los estudiantes desarrollar habilidades como estructurar, organizar, simbolizar, visualizar y esquematizar. También pueden progresar en su comprensión matemática mejorando la eficiencia de los procedimientos, utilizando atajos y haciendo la transición del lenguaje coloquial al lenguaje convencional de símbolos y variables.

Desde este punto de vista, también se sostiene que para mejorar las habilidades de pensamiento matemático de los estudiantes y, en consecuencia, mejorar la competencia matemática general de los individuos, es imperativo analizar y explorar críticamente las conexiones entre las matemáticas y sus aplicaciones (tanto positivas como negativas) en diversas áreas como la ciencia (incluidas las ciencias sociales, naturales y exactas) y la tecnología.

Los Modelos

Dentro del trabajo realizado en la EMR se han desarrollado numerosos modelos. Entre ellos se incluyen modelos como el dinero, el rekenrek (un ábaco bicolor con 20 bolas dispuestas en dos filas idénticas) y situaciones paradigmáticas como el colectivo, que se representa mediante flechas para simbolizar situaciones dinámicas antes y después.

Otros modelos incluyen la "casa de panqueques", la reunión de padres en la escuela y la fábrica de dulces con envases de 10 unidades.

Asimismo, se han explorado modelos como el modelo circular, la barra doble o porcentual y la tabla de razones. También se han utilizado collares bicolores estructurados en grupos de 10, lo que llevó al desarrollo de la recta numérica "abierta" como modelo aritmético. Además, se ha utilizado la recta numérica como modelo para resolver ecuaciones lineales, y la notación del cuaderno y la tabla de combinaciones se han empleado para trabajar con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

El uso de estos modelos, entre otros, es esencial para contrarrestar uno de los mayores desafíos en la enseñanza de las matemáticas, que es la tendencia hacia la algoritmización y la formalización prematura. Así, los modelos desempeñan un papel crucial en la simplificación de realidades o teorías complejas, lo que permite el tratamiento matemático. Surgen y se desarrollan a través de un proceso de reinvención guiado y pueden aplicarse a diversos contextos.

EMR ha trabajado en numerosos modelos, incluido el dinero, el rekenrek, situaciones paradigmáticas y varios modelos aritméticos y de resolución de ecuaciones. El uso de estos modelos es importante para combatir los efectos negativos de la algoritmización y la formalización prematura en la enseñanza de las matemáticas. Según Freudenthal, un modelo sirve como medio para simplificar e idealizar una realidad o teoría compleja, haciéndola más susceptible de tratamiento matemático. No es un artefacto o representación preexistente, sino más bien una entidad que emerge y evoluciona a través de un proceso de reinvención guiado. Inicialmente, los modelos están estrechamente ligados a los contextos y situaciones específicos en los que surgen, pero con el tiempo se desvinculan y adquieren características de modelos formales y generales que pueden aplicarse a diversos contextos, tanto dentro como fuera de las matemáticas.

Esta transición implica pasar de ser un "modelo de" una situación particular a ser un "modelo de" razonamiento matemático en diversas situaciones.

Los modelos abogan por un aumento en el uso de conceptos matemáticos de una manera que sea identificable y comprensible para los estudiantes; deben ser lo suficientemente flexibles para ser aplicados en contextos más avanzados o más amplios, y al mismo tiempo permitir a los estudiantes comprender su significado y propósito inicial. Es importante que los modelos respalden tanto la progresión vertical en la comprensión matemática como la capacidad de conectarse con el contexto o situación original. Esto permite a los estudiantes comprender plenamente el significado y la importancia de sus acciones dentro del modelo. Básicamente, los modelos deben comportarse de manera natural y obvia, alineándose con estrategias informales y siendo aplicables a una amplia gama de escenarios. A modo de ejemplo, la barra de porcentaje surge inicialmente de un contexto específico como estacionamientos o salas de cine, donde representa la ocupación de espacios a través del sombreado. Con el tiempo, la barra de porcentaje se separa de su contexto original y se transforma en una herramienta formal que se puede utilizar para trabajar y reflexionar sobre los porcentajes.

La tabla de razones, el modelo de barras y la recta numérica doble son modelos esquemáticos que se diferencian de los algoritmos tradicionales porque mantienen visibles aspectos importantes del contexto. Estos modelos permiten registrar pasos intermedios y se adaptan fácilmente al nivel de cada alumno. También sugieren el uso de atajos y múltiples estrategias para la resolución de problemas. Al utilizar simultáneamente estos tres modelos, podemos examinar las ventajas de cada uno para diferentes tipos de problemas y explorar las relaciones matemáticas dentro de ellos. Además, la tabla combinada y la notación de cuaderno son herramientas notables para la algebraización propuestas por EMR.

Estas herramientas brindan a los estudiantes la capacidad de comprender métodos tradicionales, como comprender los componentes de un sistema de ecuaciones, identificar lo que están buscando, reconocer ecuaciones equivalentes, comprender por qué ciertos sistemas pueden tener una, múltiples o ninguna solución, y determinar el método más adecuado para encontrar estas soluciones. En general, la transición a trabajar con sistemas puros no es un desafío para estos estudiantes y, en caso de que encuentren dificultades, pueden utilizar estos modelos para recordar las situaciones típicas que llevaron a su creación. Esto les permite redefinir las operaciones que realizan a un nivel algebraico formal.

La interacción

En la EMR, reflexionar y matematizar están estrechamente relacionados. Según Freudenthal, los estudiantes necesitan ser capaces de reflexionar sobre su propia actividad para alcanzar el nivel más alto de comprensión. En los procesos de reinvención guiada, la interacción entre docente y estudiantes es crucial para promover la reflexión y el intercambio de ideas. El aula debe proporcionar un espacio para la acción y reflexión individual, grupal y colectiva, donde los estudiantes no sólo respondan preguntas y resuelvan problemas, sino que también formulen sus propias preguntas matemáticas, compartan y evalúen ideas y métodos de solución, y simbolizan y generalizan las relaciones matemáticas.

Normalmente, compartir en una clase de matemáticas ocurre después de que se ha resuelto el problema, pero bajo la guía de un maestro capacitado, compartir puede tomar la forma de "pensar juntos en voz alta" en tiempo presente y modo subjuntivo y condicional, lo que permite compartir. de ideas en proceso de desarrollo. Surge la pregunta de cómo este tipo de conversaciones pueden ayudar a los estudiantes a comprender y participar plenamente en la tarea de matematización.

En el ámbito de la EMR, hay un énfasis significativo en la formulación y solución de problemas. Sin embargo, la atención se centra no únicamente en enseñar a los estudiantes cómo resolver problemas específicos, sino más bien en cultivar su capacidad e inclinación para aplicar conceptos y métodos matemáticos en diversos contextos (como aritmética, geometría, álgebra y formalización). Para lograr este objetivo, los profesores deben presentar preguntas abiertas que estén al alcance o imaginables de sus alumnos, y deben esforzarse por comprender los pensamientos y procesos de razonamiento de los estudiantes.

El profesor debe valorar e interesarse genuinamente por las aportaciones de los estudiantes, fomentando situaciones interactivas tanto en entornos de toda la clase como de grupos pequeños. Es crucial que el maestro se base en las ideas de los estudiantes, guiándolos a través de procesos reflexivos que promuevan mayores niveles de pensamiento y comprensión matemáticos para cada estudiante individual y para la clase en su conjunto. Esto requiere un maestro que pueda anticipar los hitos clave del desarrollo a lo largo del camino de la matematización progresiva.

Si la principal actividad de los estudiantes es dedicarse a las matemáticas, ¿cuál es entonces la principal actividad de los profesores y profesores? Según Freudenthal, su principal actividad es organizar y estructurar el proceso de enseñanza, que tiene tanto un aspecto horizontal como vertical. El proceso de enseñar matemáticas es paralelo al proceso de matematizar. Implica tomar conciencia de la realidad didáctica y crear un marco para la enseñanza, por un lado, y desarrollar una comprensión más profunda y generalizar a partir de situaciones de enseñanza, por el otro. Horizontalmente, los docentes se centran en los fenómenos de enseñanza y aprendizaje que ocurren en sus aulas y en otras aulas. Verticalmente, reflexionan sobre estas situaciones y las utilizan para potenciar sus propias estrategias y técnicas de enseñanza para apoyar el proceso de matematización.

Las bases teóricas: EMR

La Educación Matemática Realista, como movimiento internacional, fue fundada por Hans Freudenthal, un matemático y educador alemán. El movimiento surgió en la década de 1960 como respuesta al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética y al uso de las matemáticas "modernas" o "conjunctistas" en las aulas. Hoy en día, muchas de las ideas originales de Freudenthal son adoptadas y debatidas en las teorías educativas actuales, y han influido en los planes de estudios de varios países, incluidos Estados Unidos, Japón, Indonesia, Gran Bretaña, Alemania, Dinamarca, España, Portugal, Sudáfrica, Brasil y Puerto Rico.

Un principio fundamental de la EMR es que la educación matemática debe estar basada en la realidad, ser relevante para los estudiantes y significativa para la sociedad a fin de que sea valiosa para el desarrollo humano. Según Freudenthal, la percepción de las matemáticas está entrelazada con nuestra percepción del mundo, el papel de los matemáticos está vinculado a nuestra comprensión de la humanidad y la enseñanza de las matemáticas está conectada con la sociedad en su conjunto. En su opinión, una consideración crítica durante su época fue si las matemáticas debían verse como una materia para una minoría selecta o como una materia para todos los individuos. Creía que es crucial que todos los estudiantes tengan algún nivel de compromiso con el trabajo matemático, que definió como el acto de organizar la realidad utilizando conceptos y herramientas matemáticas, incluidas las matemáticas mismas.

Matematizar es un proceso paso a paso que involucra diversas acciones como:

- Identificar características importantes en diferentes situaciones, problemas, algoritmos, fórmulas, símbolos y sistemas basados en axiomas.
- Encontrar puntos en común, similitudes, analogías e isomorfismos entre estos elementos.
- Además, implica proporcionar ejemplos concretos para ilustrar ideas y conceptos generales.
- Requiere abordar las situaciones difíciles de manera sistemática y ejemplar. Además, la matematización implica la aparición repentina de nuevos objetos y operaciones mentales que ayudan en la resolución de problemas.
- Implica buscar estrategias eficientes y encontrar formas de simplificar los enfoques y simbolizaciones iniciales para crear esquemas, algoritmos, símbolos y sistemas formales.
- Finalmente, matematizar implica reflexionar sobre todo el proceso matemático, considerando los diversos fenómenos involucrados desde múltiples perspectivas.

Escenarios prácticos y circunstancias desafiantes

Un contexto se refiere a un dominio específico de la realidad que se revela a los estudiantes durante el proceso de aprendizaje para ser matematizado. Las matemáticas evolucionaron como un medio para matematizar situaciones de la vida real en el entorno natural y social, y por tanto, su enseñanza también debe basarse en la organización de este tipo de situaciones. Sin embargo, esto no implica centrarse únicamente en los fenómenos perceptivos, ya que esto restringiría las oportunidades de los estudiantes para aprender y participar en las matemáticas mismas.

El objetivo es que los estudiantes, que inicialmente pueden carecer de suficientes habilidades matemáticas, reinventen estas herramientas abordando problemas presentados en contextos y situaciones realistas. Un contexto puede tomar la forma de un evento, proposición o situación derivada de la realidad que tiene significado para los estudiantes o puede imaginarse, lo que impulsa el uso de métodos matemáticos basados en sus propias experiencias. Proporciona significado concreto y apoyo a las relaciones y operaciones que son relevantes para las matemáticas.

Estas situaciones pueden extraerse de experiencias cotidianas, como las rutas de autobús o las compras y la gestión del dinero. Además de los contextos derivados de la vida diaria, las matemáticas mismas ofrecen contextos dentro del ámbito de los problemas que involucran números puros y relaciones numéricas, como el contexto de los números primos. Hay varios tipos de contextos, incluidos los reales, artificiales (fantasía), matemáticos y virtuales, cada uno de los cuales se origina en la realidad pero incorpora elementos no reales con fines de simplificación o simulación.

En el ámbito de la educación matemática, es crucial reconocer el importante papel que desempeñan los contextos realistas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes:

- Los contextos realistas sirven como base para la enseñanza y el aprendizaje, permitiendo a los estudiantes desarrollar conceptos matemáticos y aplicarlos en diversos dominios.
- Cuando se seleccionan cuidadosamente, estos contextos captan el interés de los estudiantes, fomentando el compromiso y la motivación.
- Los contextos realistas sirven como objetos de estudio tangibles, facilitando la accesibilidad del contenido matemático para estudiantes en diferentes niveles de comprensión.

- Al incorporar escenarios del mundo real, se anima a los estudiantes a utilizar su sentido común y aprovechar su conocimiento informal para construir modelos matemáticos.
- La apertura de estos contextos, que permite múltiples estrategias y soluciones, fomenta debates matemáticos significativos entre los estudiantes.
- Estos contextos realistas se exploran de manera integral y profunda, asegurando una comprensión profunda de los conceptos matemáticos en cuestión.

Si bien, es importante considerar la naturaleza relativa del contexto realista para evitar generalizaciones y simplificaciones excesivas. El realismo de un contexto depende de las experiencias previas de los estudiantes y de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo; es beneficioso utilizar los modelos que surgen de las propias actividades matemáticas de los estudiantes como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones.

Estos modelos sirven como intermediarios a través de los cuales realidades o teorías complejas se idealizan o simplifican para un tratamiento matemático formal. Es crucial señalar que en el contexto de EMR, el término "modelo" no se refiere a modelos preexistentes impuestos desde las matemáticas formales, sino a modelos emergentes que se desarrollan durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. proceso. Y se forman a través de la organización y reorganización de actividades que surgen de situaciones problemáticas. Inicialmente, estos modelos están estrechamente vinculados a los contextos y situaciones específicos de los que surgen, pero con el tiempo se desvinculan y adquieren características de modelos formales y generales. Como resultado, se pueden aplicar a diversos contextos y situaciones, pasando de ser un "modelo de" una situación particular a un "modelo para" el razonamiento matemático en escenarios tanto matemáticos como no matemáticos.

Los modelos en el campo de la EMR sirven no sólo como representaciones, sino también como herramientas de análisis y reflexión. Se utilizan para realizar diversas acciones y operaciones, así como para visualizar, explicar, comparar, contrastar y verificar relaciones. Para cumplir estos propósitos, estos modelos deben cumplir una serie de criterios cruciales:

- En primer lugar, deben basarse en contextos realistas e imaginables.
- Deben poseer suficiente flexibilidad para ser aplicables a niveles más avanzados o generales.
- A diferencia de los métodos de enseñanza tradicionales, donde los modelos son fijos, estos modelos están sujetos a cambios con el tiempo. Esta naturaleza dinámica permite la progresión en el proceso de matematización, al mismo tiempo que permite a los estudiantes la capacidad de revisar las situaciones originales de las cuales se derivaron las estrategias. Esta capacidad de moverse entre niveles es lo que hace que estos modelos sean particularmente poderosos.
- Por último, estos modelos deben ser viables, es decir, deben comportarse de forma natural y evidente. Deben alinearse con las estrategias informales de los estudiantes, como si los propios estudiantes pudieran haberlas descubierto de forma independiente, y también deben ser fácilmente adaptables a diferentes situaciones.

Es importante señalar que las soluciones informales y las creaciones independientes de los estudiantes juegan un papel central en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Al trabajar en problemas que se pueden resolver de múltiples maneras, se pueden revelar los niveles de comprensión y habilidades de cálculo de los estudiantes en un momento dado. Esta información es crucial no sólo para tomar decisiones docentes a pequeña escala sino también para guiar decisiones educativas a mayor escala.

Una instantánea de la clase, con sus diversos niveles de comprensión, proporciona una idea de la trayectoria del aprendizaje y la enseñanza. Las estrategias de solución empleadas por estudiantes individuales exponen colectivamente elementos esenciales del camino a largo plazo que emprenderán los estudiantes. Por lo tanto, lo que se observa hoy en el aula anticipa lo que está por venir y más allá. La fenomenología didáctica implica estudiar inicialmente las diferentes formas en que un concepto matemático, como fracciones, razones, funciones, proporciones y ángulos, se manifiesta en la vida real. Esto incluye considerar cómo se hace referencia comúnmente a estos conceptos en el lenguaje cotidiano. A partir de esta comprensión se puede construir la didáctica del tema.

El EMR ha experimentado con varios modelos en el aula que se presentan fácilmente a través de situaciones contextuales y pueden ser recreados por los estudiantes. Estos modelos incluyen materiales didácticos manipulables como fichas, dinero y collares con bolas de dos colores organizados en grupos de diez. Además, se han utilizado situaciones paradigmáticas como el autobús, el restaurante de panqueques, la reunión de padres, la fábrica de dulces de 10 unidades y la localización de un incendio.

También se han empleado esquemas, como el modelo circular, la barra doble o porcentual y la tabla de razones, así como diagramas como los de árbol y de trayectoria. Se han utilizado además modalidades de notación como el lenguaje de flechas, la notación de cuaderno y la tabla de combinación para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, y procedimientos expresados simbólicamente como algoritmos o fórmulas de columnas. La exploración de contextos y modelos que conducen naturalmente al uso de las matemáticas se conoce como fenomenología didáctica, concepto acuñado por Freudenthal. Este enfoque está fuertemente influenciado por la historia de las matemáticas y las ideas y creaciones de los estudiantes que surgen durante el proceso de enseñanza.

El rol del docente

En el contexto de la EMR, la enseñanza de las matemáticas debería implicar un enfoque de reinvención guiada. Puesto que los estudiantes deben tener oportunidades para descubrir de forma independiente conceptos y habilidades matemáticas organizando y estructurando problemas de la vida real. Durante este proceso, los estudiantes interactúan con sus compañeros y reciben orientación del docente. El aprendizaje efectivo en este enfoque implica negociación, intervención, discusión, cooperación y evaluación explícitas.

Los métodos informales sirven como base para que los estudiantes eventualmente comprendan conceptos matemáticos formales. Este método de enseñanza interactivo requiere que los estudiantes expliquen, justifiquen, estén de acuerdo o en desacuerdo, cuestionen alternativas y reflexionen sobre su pensamiento. El docente juega un papel crucial como mediador, facilitando la comunicación entre los estudiantes y los problemas que encuentran, así como facilitando la comunicación entre los propios estudiantes. Además, el profesor cierra la brecha entre los enfoques informales de resolución de problemas de los estudiantes y las herramientas formales establecidas de las matemáticas.

El acto de aprender matemáticas se considera un proceso social en el que los individuos se reúnen para reflexionar colectivamente, lo que da como resultado una comprensión más profunda. Tanto las interacciones verticales entre profesores y estudiantes, como las interacciones horizontales entre estudiantes, juegan un papel crucial en este proceso. La forma en que el docente gestiona estas interacciones es clave para maximizar las oportunidades para que los estudiantes generen, intercambien y comprendan ideas.

Es importante tener en cuenta que una clase no se considera una entidad homogénea, sino más bien un grupo de individuos que siguen sus propios caminos de aprendizaje únicos. Sin embargo, esto no significa que la clase esté dividida en grupos con procesos similares. En cambio, la clase permanece unida como una unidad organizativa o participa en trabajo cooperativo en diversos grupos, como propugna Freudenthal.

Al seleccionar problemas que se adaptan a diferentes niveles de comprensión, todos los estudiantes pueden trabajar en ellos. Adicionalmente, hay un fuerte énfasis en la integración de los diversos ejes o unidades curriculares de matemáticas. Resolver problemas de la vida real a menudo requiere hacer conexiones y utilizar una amplia gama de conceptos y herramientas matemáticas.

El plan de estudios de EMR evita distinciones estrictas entre los ejes curriculares, creando un enfoque más cohesivo para la enseñanza y permitiendo diferentes métodos de matematizar situaciones utilizando varios modelos y lenguajes. Esto asegura un alto nivel de coherencia en todo el plan de estudios, en lugar de enseñar cada eje de forma aislada e ignorar las conexiones que existen entre ellos. En aplicaciones prácticas, la resolución de problemas normalmente requiere algo más que conocimientos de aritmética, álgebra o geometría.

Fenomenología

La perspectiva de Freudenthal sobre los objetos matemáticos difiere de las filosofías matemáticas tradicionales como el realismo y el platonismo. Estas filosofías creen que los conceptos matemáticos existen independientemente de la actividad humana y se descubren mediante la exploración matemática. Si bien, Freudenthal sostiene que los conceptos matemáticos se crean y construyen mediante la práctica matemática. Sugiere que los objetos matemáticos no son sólo herramientas para la organización, sino objetos reales con sus propias propiedades y acciones.

A medida que estos objetos matemáticos se incorporan al mundo, el mundo mismo se expande y crece. Los conceptos e ideas matemáticas se utilizan para organizar fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas. Por otro lado, los objetos mentales son creaciones de los individuos a partir de sus experiencias y sirven como medio para organizar y comprender sus propias experiencias. Freudenthal también reconoce el desafío de enseñar conceptos matemáticos, ya que requieren inculcar los conceptos correspondientes en la mente de los estudiantes. Este análisis tiene como objetivo explorar el alcance y el método propuesto por Freudenthal en su teoría de la Fenomenología Didáctica de las estructuras Matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos. Implica examinar la literatura relevante y comprender las ideas clave expuestas por Freudenthal.

El término fenomenología, tal como se utiliza aquí, no se refiere a las interpretaciones dadas por filósofos como Husserl, Hegel o Heidegger. Más bien, pertenece a los orígenes griegos de la palabra, donde "phainomeno" significa "lo que aparece". En este contexto, los fenómenos son las apariencias o cómo nos parecen las cosas. En la tradición filosófica realista, el mundo de los noúmenos se considera el mundo real.

El contraste entre fenómeno y noúmeno representa un contraste entre dos mundos: el mundo de la apariencia y la experiencia (fenómeno) y el mundo de lo sensible e inteligible (noúmeno). Algunos filósofos sostienen que los conceptos matemáticos son noúmenos, lo que los coloca fuera del ámbito de nuestra experiencia. Sin embargo, esto contradice las ideas de Freudenthal, quien ve los conceptos matemáticos como un medio para organizar los fenómenos. Según esta perspectiva, los conceptos matemáticos forman parte del campo de fenómenos que se organizan mediante nuevas ideas matemáticas.

Por tanto, los conceptos matemáticos no están separados de nuestras experiencias ni en un mundo diferente de los fenómenos que organizan. En realidad, son objetos de nuestra experiencia matemática. Para dedicarse a la fenomenología, hay que describir la relación entre estas series o pares: el fenómeno y los medios de organización. El proceso de creación de objetos matemáticos implica que los medios de organización se conviertan en objetos que aparecen en el campo de los fenómenos.

Así, los objetos matemáticos se incorporan a nuestras experiencias y pasan a formar parte de una nueva relación entre fenómeno y medios de organización. Este proceso iterativo continúa y conduce a la creación de nuevos conceptos matemáticos y a la generación de objetos matemáticos cada vez más abstractos. La fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática implica describir el noúmeno (el concepto mismo) en relación con los fenómenos que organiza. Esto incluye identificar los fenómenos para cuya organización y extensión se creó el concepto, comprender cómo actúa como medio de organización para estos fenómenos y reconocer el poder que nos otorga sobre estos fenómenos.

Los conceptos, conocidos como noumena, están intrincadamente conectados con el phainomenon. Cuando analizamos el elemento didáctico en esta relación, específicamente cómo se adquiere el concepto R fenómenos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, nos adentramos en el ámbito de la fenomenología didáctica. Este campo explora los fenómenos que existen en el mundo de los estudiantes y los que se presentan en las secuencias de enseñanza, particularmente en el contexto de las matemáticas.

Al examinar la relación fRc en términos del crecimiento cognitivo de los estudiantes, nos involucramos en la fenomenología genética. Aquí, la atención se centra en cómo se perciben y comprenden los fenómenos en relación con el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Además, si exploramos la adquisición histórica de esta relación fRc, entramos en el ámbito de la fenomenología histórica. En este caso, investigamos los fenómenos para los que se creó originalmente el concepto y cómo posteriormente se amplió para abarcar otros fenómenos.

El orden sugerido para estudiar estas fenomenologías comienza con la fenomenología pura, adquiriendo conocimientos de las matemáticas y sus aplicaciones prácticas. A esto le sigue la fenomenología histórica, que proporciona información sobre la formación de estas relaciones a lo largo de la historia. A continuación, profundizamos en la fenomenología didáctica, entendiendo el proceso de enseñanza y aprendizaje, y finalmente, la fenomenología genética examina el crecimiento cognitivo de los estudiantes. Es importante señalar que la descripción de las relaciones entre el fenómeno y el concepto considera tanto las relaciones establecidas en el primer caso como cómo estas relaciones se desarrollaron, adquirieron o formaron en el sistema educativo, cognitiva o históricamente en los otros tres casos.

La fenomenología, se puede definir como el método de análisis de contenidos matemáticos, implica el análisis fenomenológico de conceptos u objetos matemáticos. Este análisis se realiza con una intención didáctica, es decir, se realiza previo a cualquier diseño o desarrollo curricular, y se considera un componente del análisis didáctico. El propósito del análisis fenomenológico es servir como base para organizar la enseñanza de las matemáticas, en lugar de intentar proporcionar una explicación de la naturaleza de las matemáticas.

Una de las principales tareas de la fenomenología es investigar los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos analizándolos. Se supone que estos fenómenos no han existido antes. En contraste con el enfoque típico de la enseñanza de las matemáticas, la Fenomenología Didáctica propone un enfoque diferente. Sugiere comenzar con los fenómenos que requieren organización por un concepto y luego enseñar a los estudiantes cómo manipular estos medios de organización.

Se debe utilizar la fenomenología didáctica para desarrollar planes con este tipo de enfoque. Por ejemplo, al enseñar sobre Grupos, en lugar de comenzar con el concepto de Grupo y tratar de materializarlo, el foco estaría en examinar los fenómenos que podrían llevar al estudiante a formar el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto de grupo. Si los fenómenos necesarios no están disponibles a una determinada edad, se abandonan los intentos de inspirar el concepto.

En el sistema escolar, los conceptos se presentan a menudo a los estudiantes antes de que tengan experiencia con los fenómenos correspondientes. El sistema educativo pretende ayudar a los estudiantes a formar objetos mentales como medio de organización de estos fenómenos, y también proporciona acceso a los medios de organización que la historia ha proporcionado, que son los conceptos.

Si bien, en el contexto de la historia, los conceptos matemáticos no existen antes de nuestra experiencia con ellos. Es la actividad de los matemáticos la que crea estos conceptos. A lo largo de la historia, los conceptos matemáticos han surgido como consolidaciones de objetos mentales. La actividad matemática genera conceptos a partir de objetos mentales. La relación entre conceptos y objetos mentales es compleja, ya que ambos sirven como medios para organizar los fenómenos. Los objetos mentales preexisten a los conceptos y los conceptos no reemplazan a los objetos mentales, sino que permiten la formación de nuevos objetos mentales que los contienen o son compatibles con ellos. La distancia entre el objeto mental inicial y el concepto puede ser significativa.

Capítulo 3

La contextualización de la matemática realista en educación

La exigencia de establecer una conexión entre las matemáticas que se enseñan en las instituciones educativas y la vida de los estudiantes es un llamado de la sociedad, proveniente tanto del mundo académico como del mundo profesional. Esta demanda no es aislada; es parte de una petición más amplia al propio sistema escolar, donde la sociedad en su conjunto espera que lo que se enseña en nuestras escuelas permita a los estudiantes funcionar eficazmente en sus vidas. Ha habido respuestas rápidas a estas demandas.

A nivel internacional, la Organización para el Desarrollo y la Cooperación Económicos (OCDE) ha resaltado, a través del estudio PISA, la importancia de desarrollar competencias matemáticas que permitan a los individuos reconocer y comprender el papel de las matemáticas en el mundo, realizar razonamientos bien fundamentados y utilizar las matemáticas de acuerdo con sus necesidades vitales como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. Más recientemente, el mismo estudio enfatiza que el desarrollo de una cultura matemática en las escuelas debería ayudar a los individuos a identificar y comprender el papel de las matemáticas en el mundo, proporcionándoles el juicio necesario para tomar decisiones basadas en convertirse en ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) también enfatiza la importancia de conectar las matemáticas enseñadas con la vida actual y futura de los estudiantes. En el contexto latinoamericano, esta demanda social también es evidente. Los lineamientos curriculares establecidos por el Ministerio de Educación de Colombia establecen que el objetivo principal de la educación matemática es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que las rodea y comprender los significados construidos por los demás.

Al aprender matemáticas, los estudiantes no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y reflexión lógica, sino que también adquieren poderosas herramientas para explorar, representar, explicar y predecir la realidad, permitiéndoles actuar en y para ella (Ministerio de Educación Nacional, 1998). La propuesta de Venezuela para la enseñanza de todas las materias del currículo también enfatiza la importancia de vincular la educación con la vida de los estudiantes, haciéndola relevante tanto individual como socialmente. Además de estas demandas de la sociedad, también existe una demanda de la comunidad académica. Dentro del campo de la educación matemática, se defiende la necesidad de establecer esta conexión desde diferentes perspectivas epistémicas, como la Educación Matemática Crítica y la Educación Matemática Realista. Estas demandas se justifican en el deseo de que la educación matemática contribuya a la formación de ciudadanos conscientes y participativos, promoviendo la matemática inclusiva y evitando el carácter excluyente de los enfoques tradicionales.

Al enfocarnos en las instituciones educativas, se tiene que, es cada vez más común que la gente, en particular los profesores, enfaticen que "las matemáticas están en todas partes". Esta es una respuesta a la creciente demanda social de que las matemáticas escolares sean relevantes y aplicables a la vida presente y futura de los estudiantes. Sin embargo, si bien existe un acuerdo generalizado sobre la importancia de conectar las matemáticas con la vida de los estudiantes, ha resultado difícil cumplir esta expectativa. Es común y está demostrado que, cuando se les pide tanto a los profesores en formación como en ejercicio que proporcionen ejemplos específicos, a menudo tienen dificultades para hacerlo. Sus respuestas suelen girar en torno a conceptos básicos relacionados con la compra y la venta, pero hay muchos otros fenómenos y situaciones de la vida en los que las matemáticas desempeñan un papel.

En otras palabras, las matemáticas deben tener sentido para los estudiantes que las aprenden relacionándolas con sus necesidades e intereses en sus propias experiencias de vida. Para lograr esto, los docentes deben crear oportunidades para una comunicación continua con sus estudiantes, y el discurso que emplean juega un papel crucial en este proceso. Cuando nos referimos al discurso del docente, lo estamos considerando en un sentido pragmático, teniendo en cuenta las relaciones contextuales que guían la interacción comunicativa entre el docente y sus alumnos. En última instancia, lo que defendemos es la necesidad de dotar a la educación matemática de un significado que resuene en los estudiantes que la aprenden.

Para garantizar que las matemáticas sean significativas para los estudiantes, es fundamental conectarlas con su vida cotidiana. Esta conexión debe ser tanto personal como social. Por ello, proponemos priorizar la contextualización de la enseñanza de las matemáticas. Esta idea no es nueva, ya que varios investigadores y educadores han enfatizado la necesidad de este enfoque. Sostienen que las matemáticas deben verse como una actividad humana y deben enseñarse en relación con la realidad de los estudiantes. En lugar de ver las matemáticas como un sistema deductivo, estos académicos sugieren que los estudiantes deberían involucrarse con las matemáticas a través de experiencias de la vida real que les ayuden a verlas como una herramienta para organizar y comprender sus realidades presentes y futuras.

Esta perspectiva sigue siendo relevante en los debates actuales sobre el diseño curricular, así como en las opiniones de organizaciones como el NCTM y la OCDE. Desde un punto de vista individual, cada persona aprende mejor cuando el conocimiento es significativo para su propia vida. Desde una perspectiva social, la educación matemática debería tener aplicaciones prácticas que permitan a los individuos integrarse en la sociedad.

La información recopilada proporciona evidencia de prácticas educativas en matemáticas que incorporan situaciones de la vida real en los procesos de enseñanza. Sin embargo, estas prácticas pueden verse como desviaciones que deben evitarse en nuestras aulas. Discutiremos tres desviaciones específicas: la comprensión de la realidad por parte de los profesores, los tipos de relaciones que se establecen entre los conceptos matemáticos y las situaciones de la vida real, y la profundidad del estudio de los objetos matemáticos en el aula.

Es importante reconsiderar ciertas prácticas educativas en matemáticas que incorporan situaciones de la vida real. Los profesores deben tener una comprensión más amplia de la realidad, no limitarse sólo a situaciones cotidianas, y deben priorizar la integración de las matemáticas con las experiencias vitales de los estudiantes desde el principio. Al adoptar un enfoque más holístico que combine teoría y práctica, las matemáticas pueden volverse más significativas y relevantes para los estudiantes, independientemente de su origen socioeconómico.

La primera desviación tiene que ver con la comprensión de la realidad por parte de los profesores y cómo ésta influye en la integración de las matemáticas con situaciones de la vida real. En entrevistas con profesores de matemáticas, tanto en formación como en práctica, se les pidió que proporcionaran ejemplos de situaciones reales que podrían vincularse con las matemáticas. Sin excepción, estos profesores dieron ejemplos perceptibles a los sentidos y estrechamente relacionados con la vida cotidiana de los estudiantes. Este hallazgo es consistente con otros estudios que también han observado esta tendencia entre los profesores de matemáticas. Si bien, limitar el contexto únicamente a situaciones cotidianas tiene implicaciones éticas y pedagógicas. Principalmente perjudica a los estudiantes que tienen experiencias de vida limitadas debido a su desventaja socioeconómica.

El contexto puede ser geográfica y cronológicamente cercano al estudiante, pero no debe limitarse exclusivamente a su entorno inmediato. Por ejemplo, estudiar la cultura maya y sus contribuciones a las matemáticas puede no ser un contexto cotidiano para los estudiantes, pero aun así puede ser significativo y de interés para ellos si están motivados adecuadamente. Explorar las matemáticas en diferentes contextos culturales puede ampliar los horizontes de los estudiantes, independientemente de su origen socioeconómico.

La segunda desviación se relaciona con los tipos de relaciones que se establecen entre conceptos matemáticos y situaciones de la vida real. Muchos profesores tienden a presentar primero la teoría matemática y luego intentan mostrar su aplicación en contextos específicos. Este enfoque deductivo del aprendizaje supone que los estudiantes sólo pueden comprender y aprender la teoría si está desconectada de sus experiencias de vida. Sin embargo, presentar las matemáticas de manera teórica sin relacionarlas con las experiencias de la vida real de los estudiantes puede hacer que les resulte menos interesante y difícil comprender el tema. Creemos en un enfoque de enseñanza que combina teoría y práctica, donde las matemáticas se integran en la vida de los estudiantes a partir de sus experiencias previas. Este enfoque permite a los estudiantes ver la relevancia y aplicabilidad de las matemáticas en su vida diaria y amplía su visión del mundo.

Además, queremos destacar otro aspecto que se aleja de nuestras expectativas. Esto se refiere al grado en que se exploran los conceptos matemáticos en el aula, específicamente a través de la incorporación de situaciones de la vida real que son relevantes para los estudiantes. Desafortunadamente, lo que a menudo presenciamos es una simplificación excesiva del contenido matemático. Cuando los profesores intentan conectar las matemáticas con la vida cotidiana de los estudiantes, a menudo lo hacen de manera superficial e inconsistente. Por ejemplo, nos hemos encontrado con casos en los que los profesores intentan contextualizar las medidas de peso pidiendo a los estudiantes que las utilicen sólo cuando siguen una receta para un proyecto de clase. Está claro que no hay una exploración en profundidad de los conceptos matemáticos involucrados, ni ninguna expansión de las aplicaciones prácticas de las mediciones de peso.

Principios orientadores

Las claves para contextualizar las matemáticas se basan en principios expuestos en lo que se conoce como educación matemática realista. Este enfoque, desarrollado por Freudenthal, Gravemeijer, Puig y Goffre, enfatiza ver las matemáticas como una actividad humana. Según esta perspectiva, enseñar matemáticas implica crear una conexión entre los conceptos matemáticos y las experiencias del mundo real del estudiante. El objetivo es que los estudiantes vean las matemáticas como una herramienta para organizar, comprender y transformar el mundo que los rodea.

Desde un punto de vista epistemológico, esto significa pasar del enfoque actual de presentar las matemáticas como una disciplina con un sistema deductivo fijo e inalcanzable, a una visión de las matemáticas como un proceso de construcción continuo. En este nuevo enfoque, la interacción de los estudiantes con su entorno se convierte en un proceso de reinvención guiado por el docente. Este tipo de contextualización se extiende más allá del cuerpo humano a otros fenómenos o contextos (f1, f2, f3,...). Por ejemplo, la arquitectura y las artes plásticas brindan amplios ejemplos de simetría y rotación que pueden estudiarse utilizando conceptos matemáticos. Al incorporar estos contenidos matemáticos al estudio de diferentes contextos, se amplía el horizonte de la comprensión matemática.

Este enfoque educativo matemático implica dos procesos simultáneos: matematización horizontal y matematización vertical. La matematización horizontal es relacionar un conjunto de situaciones no matemáticas con conceptos matemáticos. Por ejemplo, cuando se nos presenta el cuerpo humano, es posible que no veamos inmediatamente las matemáticas que se pueden derivar de él. Sin embargo, las matemáticas pueden ayudarnos a comprender mejor el cuerpo humano y viceversa. Es función del docente descubrir y resaltar los elementos matemáticos inherentes al cuerpo humano. De este modo, tanto las matemáticas como el cuerpo humano se perciben bajo una nueva luz, la denominada Fenomenología Didáctica. En el caso del ejemplo del cuerpo humano, las matemáticas nos permiten explorar conceptos como simetría, rotación, proporciones y proporción áurea, utilizando sistemas de medición de longitud tanto convencionales como no convencionales.

Al mismo tiempo, si bien nos centramos en el proceso de matematización horizontal en el aula, es importante abordar también la matematización vertical. La matematización vertical implica ampliar los procesos matemáticos que se derivan del examen de diversos fenómenos. En otras palabras, no se trata sólo de ampliar el alcance de diferentes fenómenos o contextos en relación con los procesos de matematización horizontal; pero también implica profundizar en el estudio de los objetos matemáticos. Este concepto se conoce como matematización vertical, tal como lo plantea Treffers (1987). Para ilustrar mejor esto, consideremos el ejemplo del estudio del cuerpo humano. Al explorar el cuerpo humano, podemos explorar la interconexión de diferentes objetos matemáticos y obtener una comprensión más profunda de ellos. Por ejemplo, al examinar las medidas y las proporciones, podemos profundizar en la generalización de la conversión de unidades y explorar el teorema de Tales.

Las claves

La tarea de hacer que la expresión "las matemáticas están en todas partes" cobre vida en el aula no es sencilla, como señalan. Normalmente, existe una falta de diversidad en los fenómenos o contextos a través de los cuales enseñamos matemáticas, apoyándonos muchas veces en ejemplos relacionados con la aritmética y la geometría básicas. Esta situación puede atribuirse a las diferencias en las prácticas y códigos sociales dentro del sistema escolar en comparación con aquellos fuera de él.

Por lo tanto, la clave está en encontrar formas de incorporar a nuestras prácticas educativas las prácticas sociales y los códigos comunicativos de las matemáticas que existen más allá del entorno escolar. Para lograr esta incorporación del mundo matemático a nuestras aulas, existen diversos ámbitos y personas que se pueden abordar. En esta discusión, nos centraremos específicamente en el papel del maestro.

Un aspecto importante de la enseñanza de matemáticas de manera contextualizada es que el educador matemático tenga una comprensión profunda del concepto matemático en sí, incluidos sus fundamentos, historia y aplicaciones en el mundo real. Al conocer los orígenes de un tema matemático, los educadores pueden comprender los problemas que llevaron a su desarrollo y encontrar situaciones similares que pueden adaptarse con fines de aprendizaje. Por ejemplo, el descubrimiento del número pi por civilizaciones antiguas como los griegos y los egipcios, que lo utilizaron en problemas de medición relacionados con círculos, puede replicarse hoy en día si los estudiantes manipulan objetos circulares para llegar a las mismas conclusiones. Además del contexto histórico, también es crucial comprender las aplicaciones modernas de los conceptos matemáticos.

Los educadores deben hacer preguntas sobre la utilidad y relevancia del tema en diferentes contextos y los problemas que puede resolver. También es importante reconocer la conexión entre los problemas que se estudian y la estructura conceptual del concepto matemático que se enseña. Se trata de identificar un conjunto de situaciones que comparten un mismo tema de fondo, que puede ser natural, social o cultural. Por ejemplo, al enseñar sobre pi, los educadores pueden presentar situaciones identificables a los estudiantes, como diseñar maceteros en la escuela o resolver problemas de diseño industrial que requieren elegir entre un contenedor cilíndrico o un paralelepípedo según sus respectivas capacidades. En tales casos, el valor de pi juega un papel fundamental a la hora de tomar la decisión.

Otro aspecto importante de la contextualización implica la capacidad de buscar información y analizarla desde la perspectiva del aula. Para comprender los orígenes y aplicaciones de ciertos temas matemáticos es necesario explorar diferentes fuentes de información. Una fuente valiosa son las tecnologías de la información, que brindan acceso a una gran cantidad de información a través de plataformas web 2.0. Esta abundancia de información elimina la excusa de no tener conocimientos sobre un tema.

Los docentes deben buscar activamente estas fuentes y, lo que es más importante, aprender a discernir cuáles son confiables y relevantes para la situación específica en cuestión. Esto enfatiza la importancia de poder analizar la información que nos proporciona. Los estudiantes también pueden desempeñar un papel en esta búsqueda de información, ya que pueden ser guiados para convertirse en aliados en esta investigación. Sin embargo, existen otras fuentes que a menudo se pasan por alto y se descuidan en el panorama educativo actual, como las fuentes bibliográficas y los informantes clave.

Los informantes clave son personas que poseen conocimientos y perspicacias especializados, pero que rara vez son considerados por las escuelas. Si bien, podrían ser fundamentales para incorporar conocimientos matemáticos utilizados fuera del contexto escolar. Por ejemplo, si queremos enseñar a los estudiantes el concepto y cálculo de área, podemos encontrar numerosos recursos en plataformas web 2.0 y en libros de texto escolares que proporcionan conocimientos formales sobre el tema. Sin embargo, tenemos una comprensión limitada de cómo los albañiles, ingenieros y arquitectos utilizan este concepto matemático en sus profesiones. Es posible que sus enfoques no siempre se alineen con lo que se enseña en la escuela, pero sus métodos se validan en su práctica diaria. Entonces, ¿por qué no invitarlos a compartir sus conocimientos y experiencias con los estudiantes? El objetivo no es reemplazar el conocimiento institucional con conocimiento matemático derivado de prácticas sociales, sino más bien complementar ambos mundos y lograr una mejor comprensión de sus potencialidades y limitaciones. Al hacerlo, podemos cerrar la brecha entre las matemáticas que se enseñan en la escuela y las que se utilizan fuera de ella.

Para comprender verdaderamente a los estudiantes y conectar con ellos a un nivel más profundo, es esencial entablar conversaciones significativas y establecer vínculos emocionales. Esto implica no solo buscar ideas de expertos y conocimientos establecidos, sino también comunicarse activamente con nuestros estudiantes para conocer sus intereses, necesidades y métodos de comunicación preferidos. Al fomentar esta conexión profesor-alumno, podemos identificar qué contextos son más propicios para integrar las matemáticas en la vida de nuestros estudiantes. Sin embargo, esto requiere que el docente posea fuertes habilidades de comunicación y voluntad de entablar un diálogo.

Crear un entorno que apoye el diálogo es crucial para su desarrollo. Esto significa ir más allá de la dinámica tradicional del aula y permitir la presentación y discusión de ideas matemáticas. Las clases deberían transformarse en foros donde todos puedan expresar libremente sus opiniones y compartir sus hallazgos sobre situaciones de aprendizaje matemático. No obstante, el papel del docente se extiende más allá de los confines del aula. Es importante que participen activamente en otros espacios dentro de la escuela o incluso fuera de ella, donde puedan entablar conversaciones sinceras y continuas con sus estudiantes, la comunidad educativa y la sociedad en su conjunto. De esta manera, podemos obtener una comprensión integral de las personas a las que enseñamos, incluidas sus habilidades cognitivas y el entorno en el que operan, como su origen social, dinámica familiar e influencias comunitarias.

Enseñar matemáticas de una manera que se relacione con la vida cotidiana del estudiante implica integrar sus conceptos en situaciones de la vida real. Esto significa que el contenido que se enseña en nuestras aulas debe tener un significado práctico para los estudiantes. Desde nuestro punto de vista, creemos que este enfoque de la enseñanza de las matemáticas puede ayudar a formar a los estudiantes como ciudadanos que comprendan y transformen el mundo en el que viven, todo ello dentro de un marco de respeto y libertad.

Creemos firmemente que la contextualización es válida y relevante en el sistema educativo actual, pero es crucial señalar que esta contextualización no debe ser arbitraria. Para contextualizar eficazmente las matemáticas, hay tres factores clave a considerar. En primer lugar, el profesor debe tener un conocimiento profundo de los conceptos matemáticos, sus orígenes y sus aplicaciones. En segundo lugar, el docente debe tener conocimiento de los intereses, las necesidades y el contexto en el que habitualmente se desenvuelven sus alumnos. Por último, el docente debe poseer la capacidad de buscar y analizar información con el fin de ampliar sus propios conocimientos sobre matemáticas, incluidos sus fundamentos y aplicaciones. Al hacerlo, el profesor puede crear situaciones de aprendizaje en las que las matemáticas se convierten en una herramienta para explicar las realidades de la vida de los estudiantes, tanto presentes como futuras. Las matemáticas escolares deberían ir más allá de la imagen tradicional de un conjunto de teorías y reglas definidas deductivamente que permanecen sin cambios en el tiempo. Más bien, debería verse como un tema en constante desarrollo, donde la orientación del educador es crucial.

El docente debe reinventar constantemente sus clases en colaboración con los estudiantes, explorando diversos contextos que contribuyan a una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos que se estudian. El objetivo es que los estudiantes aprendan matemáticas participando activamente en actividades matemáticas y, para que esto suceda, el contenido que se enseña debe ser significativo y relevante.

Todas estas ideas presentadas aquí plantean preguntas importantes sobre la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Estas preguntas nos desafían a considerar qué matemáticas deberían aprender los futuros profesores, así como qué herramientas teóricas y metodológicas deberían adquirir para reconocer las matemáticas en diferentes contextos y diseñar situaciones de aprendizaje en consecuencia. Estas preguntas, entre otras, podrían ser el foco de futuras investigaciones. Como formadores de docentes, es nuestra responsabilidad abordar estos desafíos y contribuir a rectificar la brecha de larga data entre docentes y estudiantes, que se ha perpetuado al enseñar matemáticas aislada de los contextos del mundo real.

Las perspectivas didácticas de las matemáticas

Es preciso señalar que existe una distinción entre educación y didáctica. La educación abarca un ámbito más amplio que la didáctica, permitiéndonos diferenciar entre Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas. Al adoptar este enfoque, se define a la educación matemática como "todo el sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y fines de formación" que constituyen una actividad social compleja y diversa relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La Didáctica de la Matemática, se refiere a la disciplina que estudia e investiga los desafíos que se presentan en la educación matemática y propone acciones fundamentadas para su transformación. Sin embargo, en el mundo de habla inglesa, el término "Educación Matemática" se utiliza para referirse al campo del conocimiento que se conoce como Didáctica de las Matemáticas en países como Francia, Alemania y España. También se identifica la Educación Matemática como una disciplina científica y un sistema social interactivo que abarca teoría, desarrollo y práctica.

En su diagrama, Steiner (1990) representa la Educación Matemática (ME) como una disciplina que está conectada, como parte de ella, a otro sistema social complejo llamado Sistema de Enseñanza de Matemáticas (SEM) - al que Steiner se refiere como " Educación, Matemáticas y Enseñanza", que se representa como el círculo más grueso fuera de YO. Dentro de este sistema existen varios subsistemas, entre ellos la propia clase de matemáticas (CM), la formación docente (FP), el desarrollo curricular (CD) y la Educación Matemática (ME) como institución que forma parte de la SEM. Steiner amplía aún más el diagrama al incluir todo el sistema social relacionado con la comunicación de las matemáticas, lo que abarca nuevas áreas de interés para la Educación Matemática, como la cuestión del "nuevo aprendizaje en la sociedad" (NAS) provocado por el uso de computadoras como un medio para enseñar ideas y habilidades matemáticas fuera del contexto escolar.

También incluye el estudio de las interrelaciones entre la Educación Matemática y la Educación en Ciencias Experimentales (ECE) dentro de este ámbito. Steiner considera la actividad teorizante (TEM) como un componente de la educación matemática y, por tanto, del sistema más amplio al que nos referimos como SEM, que constituye el sistema de enseñanza de las matemáticas. TEM se posiciona externamente para considerar y analizar el sistema global integral en su conjunto.

Otro modelo que propone las relaciones entre la Educación Matemática y otras disciplinas es el presentado por Higginson (1980), quien identifica las matemáticas, la psicología, la sociología y la filosofía como las cuatro disciplinas fundamentales. Higginson visualiza la Educación Matemática en términos de las interacciones entre estas cuatro disciplinas, representadas por las caras de un tetraedro.

Estas diferentes dimensiones de la Educación Matemática engloban las cuestiones fundamentales que surgen en nuestro campo, como qué enseñar (matemáticas), por qué (filosofía), a quién y dónde (sociología), y cuándo y cómo (psicología). En el trabajo de Higginson, también explora las aplicaciones de este modelo para aclarar aspectos esenciales como comprender las perspectivas tradicionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, comprender los factores que han llevado a cambios curriculares en el pasado y predecir cambios futuros, y examinar la evolución de las concepciones sobre la investigación y la formación docente.

El estudio de las corrientes epistemológicas revela que las teorías científicas no pueden existir de forma aislada ni ser producto de esfuerzos individuales. En lugar de ello, debe haber una comunidad de investigadores que compartan intereses comunes y acuerden los métodos apropiados para abordar los problemas de investigación. Es importante lograr un equilibrio entre la autonomía personal en el desarrollo de nuevas ideas y la necesidad de que estas ideas sean compartidas y probadas dentro de una comunidad. Por tanto, las teorías son el resultado de esfuerzos de investigación colaborativos dentro de un campo específico.

Para que un campo de investigación sea considerado “ciencia normal” según los criterios de Kuhn, deben cumplirse ciertas condiciones:

- En primer lugar, debe haber un grupo de investigadores que compartan intereses comunes y se centren en estudiar las interrelaciones entre diferentes aspectos de un fenómeno complejo del mundo real.
- En segundo lugar, las explicaciones proporcionadas por la teoría deben ser causales y permitir hacer predicciones sobre el fenómeno.
- Finalmente, el grupo de investigadores debe acordar un vocabulario, una sintaxis y procedimientos comunes para probar y evaluar la teoría.

Los conceptos, proposiciones y teorías científicas se distinguen de las construcciones no científicas por su adhesión al método científico y al razonamiento lógico, así como por su aceptación por parte de la comunidad científica. Sin embargo, el requisito de un paradigma único o una comunidad unificada de especialistas, tal como lo define Kuhn, puede ser demasiado restrictivo. En las ciencias sociales y humanas, incluida la Educación Matemática, es natural y beneficioso tener escuelas de pensamiento en competencia, ya que fomentan el desarrollo de diversas estrategias de investigación y la exploración de problemas desde diferentes perspectivas.

La complejidad de los fenómenos estudiados puede requerir la coexistencia de múltiples programas de investigación, cada uno de ellos respaldado por diferentes paradigmas tomados de diversas disciplinas. El enfoque epistemológico de Bunge (1985), que considera los campos científicos como conjuntos de líneas de investigación en competencia, parece más adecuado para comprender el estado actual de la Didáctica de las Matemáticas.

Algunos autores han categorizado determinadas didácticas como meros conocimientos técnicos o, a lo sumo, conocimientos tecnológicos, en lugar de reconocerlas como ciencias de la educación por derecho propio. Si bien, al considerar la relación entre teoría general y teoría específica, como explica Bunge, queda claro que la didáctica especial no es simplemente subcampos o capítulos dentro de la didáctica general o la psicología de la educación. Más bien, representan teorías específicas que abarcan aspectos particulares del campo más amplio.

Cada teoría específica incluye la teoría general y las hipótesis subsidiarias que describen las características únicas de los objetos que se estudian. Si bien comúnmente se supone que la teoría general incluye todas las teorías específicas, Bunge sostiene que en realidad es al revés. La teoría general puede derivarse de teorías específicas eliminando las premisas específicas y centrándose sólo en los supuestos comunes a todas las teorías.

Esta distinción es importante cuando se consideran los fenómenos del aprendizaje y la enseñanza. Es necesario preguntarse: ¿aprender de qué? ¿Enseñanza de qué? La naturaleza del conocimiento que se enseña, así como los factores psicopedagógicos, sociales y culturales, desempeñan un papel en la explicación y predicción de los fenómenos de aprendizaje y enseñanza. Por lo tanto, la práctica de la Educación Matemática, incluida la programación, el desarrollo curricular y las estrategias de instrucción, debe tener en cuenta la especificidad del conocimiento que se enseña.

Las limitaciones de las teorías educativas generales existentes resultan en última instancia en el desarrollo de nuevas teorías que son más adecuadas para explicar y predecir los fenómenos que buscan comprender. De hecho, estas nuevas teorías pueden incluso introducir ideas audaces e innovadoras que desafíen los fundamentos mismos de las teorías establecidas. El estrecho marco de las técnicas de enseñanza tradicionales, incluido el uso de la tecnología, es insuficiente para las teorías que se construyen dentro de ciertas ramas de la investigación en Educación Matemática. Los matemáticos, al contemplar los procesos de creación y transmisión de conceptos matemáticos, se ven obligados a asumir el papel de epistemólogos, psicólogos, sociólogos y educadores; en otras palabras, también deben convertirse en practicantes didácticos.

Después de considerar detenidamente los criterios establecidos por diversos autores para definir una disciplina científica, nos queda plantearnos si el campo de la Didáctica de las Matemáticas cumple con estos requisitos. Específicamente, cuestionamos si existe una comunidad de investigadores dentro de este campo que participen activamente en el desarrollo de uno o múltiples programas de investigación que puedan generar una teoría o teorías integrales de la Educación Matemática. La siguiente sección tiene como objetivo proporcionar una visión general del estado actual de la investigación en esta área, con un enfoque particular en las contribuciones realizadas por destacados grupos de investigación como los grupos de Teoría de la Educación Matemática (TME) y Psicología de la Educación Matemática (PME). Además, describiremos varias perspectivas y enfoques clave en el campo, incluida la resolución de problemas y el modelado, los marcos socioculturales, la escuela francesa de didáctica de las matemáticas, el interaccionismo simbólico, el punto de vista sociocrítico y la fenomenología didáctica de H. Freudenthal.

Educación Matemática: Teoría y Filosofía

Durante la década de 1990, la investigación en educación matemática en Estados Unidos carecía de una base teórica sólida y no se centraba en la construcción de modelos teóricos. Aunque, en las últimas dos décadas se ha producido un cambio significativo en esta tendencia. Hoy en día, a la hora de publicar artículos en revistas de referencia, es obligatorio proporcionar una referencia clara al marco teórico que sustenta los estudios.

Este cambio es evidente en el creciente número de publicaciones que discuten y analizan diversos enfoques teóricos y filosóficos de la educación matemática.

En 1984, el profesor Steiner tenía la intención de formar un grupo de investigación en el V Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) que se centrara en el desarrollo de una Teoría de la Educación Matemática. Esto llevó a la creación de un Área Temática denominada "Teoría de la Educación Matemática" en el Congreso, que contó con cuatro sesiones dedicadas. Después del Congreso, las discusiones continuaron en reuniones posteriores y se formó un Grupo de Trabajo denominado TME (Teoría de la Educación Matemática).

Los congresos TME que se han realizado desde entonces han demostrado que existe una comunidad interesada en construir las bases teóricas de la Didáctica de las Matemáticas como ciencia. Esta comunidad está formada por investigadores en Educación Matemática, matemáticos, docentes, psicólogos educativos, sociólogos educativos y formadores de docentes, entre otros. Steiner (1985) propone que la Educación Matemática debería servir como vínculo entre las matemáticas y la sociedad. Esto se puede lograr mediante la exploración de dimensiones olvidadas de las matemáticas, como las dimensiones filosófica, histórica, humana, social y didáctica.

Al analizar las cuestiones planteadas dentro del Grupo TME, que ha atraído a una mayoría de investigadores interesados en los fundamentos teóricos de la Educación Matemática, podemos comenzar a comprender los conceptos centrales de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. La formación de esta comunidad científica está impulsada por intereses profesionales y ha propiciado una orientación académica en su trabajo. Por ejemplo, en Alemania, entre 1960 y 1975, se crearon más de 100 cátedras en las escuelas de formación de profesores, específicamente para los departamentos de matemáticas.

En España se produce un fenómeno similar desde 1985 con el reconocimiento de la Didáctica de las Matemáticas como área de conocimiento y la creación de departamentos universitarios para profesores de esta área. Sin embargo, existe el riesgo de que la Educación Matemática quede desconectada de la realidad social debido a este enfoque académico. En general, el Grupo TME y sus conferencias tienen como objetivo avanzar en los fundamentos teóricos de la Educación Matemática y promover su integración con otras disciplinas, considerando al mismo tiempo sus implicaciones prácticas y su relevancia social.

Para abordar estos componentes, el Grupo TME explora diversos temas como la definición de la Educación Matemática como disciplina, el uso de modelos y teorías en la investigación, el papel de los macromodelos y micromodelos, el debate entre teorías específicas y enfoques interdisciplinarios. , las relaciones entre la Educación Matemática y sus campos referenciales, y los aspectos éticos, sociales y políticos de la Educación Matemática.

Asimismo, el grupo enfatiza la importancia de la teoría de sistemas, particularmente las teorías de sistemas sociales, para entender la Educación Matemática como un sistema interactivo. El programa de desarrollo del Grupo TME se centra en el estado actual y las perspectivas futuras de la Educación Matemática como campo académico y como intersección entre investigación, desarrollo y práctica. Este programa consta de tres componentes:

- (A) identificar y formular problemas fundamentales en la orientación, fundamento, metodología y organización de la Educación Matemática,
- (B) desarrollar un enfoque integral de la Educación Matemática como un sistema interactivo, y

- (C) examinar los interdependencias y condicionantes en la Educación Matemática, incluido el análisis de las complementariedades.

La Segunda Conferencia del Grupo TME, que tuvo lugar en 1985 en el Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) de la Universidad de Bielefeld, se centró en el tema más amplio de "Fundamentos y metodología de la disciplina Educación Matemática (Didáctica) de las Matemáticas. " Esta conferencia destacó principalmente el papel de la teoría y la teorización en dominios específicos dentro de la Educación Matemática. Algunos de los temas específicos discutidos incluyeron teorías sobre la enseñanza, la teoría de situaciones didácticas, la teoría interaccionista del aprendizaje y la enseñanza, el papel de las metáforas en la teoría del desarrollo, teorías empíricas en la enseñanza de las matemáticas, teorías matemáticas fundamentales, conceptos teóricos para la enseñanza de las matemáticas aplicadas, teoría de la representación para comprender el aprendizaje matemático y estudios históricos sobre el desarrollo teórico de la educación matemática como disciplina.

Los grupos de trabajo de la conferencia se dedicaron a analizar el uso de modelos, métodos, teorías, paradigmas y otras herramientas de investigación dentro de diferentes dominios de investigación. A pesar de la diversidad de temas discutidos en las conferencias TME, todavía no existe un consenso claro sobre las cuestiones centrales y los conceptos fundamentales dentro de la Educación Matemática. Si bien las conferencias han generado muchos resultados parciales y orientación práctica para el aula, todavía falta progreso hacia el establecimiento de una disciplina académica cohesiva con sus propios fundamentos teóricos.

El tema de la Tercera Conferencia, celebrada en 1988 en Amberes, Bélgica, se centró en el papel y las implicaciones de la investigación en Educación Matemática para la formación de profesores. Esta conferencia tuvo como objetivo abordar la importante brecha que existe entre la enseñanza y el aprendizaje en este campo. Algunas de las cuestiones específicas discutidas incluyeron la brecha entre la enseñanza y el aprendizaje en las clases de matemáticas, la brecha entre la investigación sobre la enseñanza y la investigación sobre el aprendizaje, los modelos para el diseño de la enseñanza basados en la investigación sobre el aprendizaje, la necesidad de teoría e investigación en los trabajos y proyectos de desarrollo, el papel del contenido y las diferentes perspectivas de las matemáticas para cerrar la brecha entre la investigación y el aprendizaje, el papel de la interacción social en el aula y las implicaciones del tema de la conferencia en la formación docente. Además, la conferencia exploró el papel de las computadoras como tercer componente en la interacción enseñanza-aprendizaje.

La cuarta Conferencia, celebrada en Oaxtepec, México en 1990, se centró en dos temas principales: las relaciones entre las orientaciones teóricas y los métodos de investigación empírica en la Educación Matemática, y el papel de los aspectos y enfoques holísticos y sistémicos en la Educación Matemática. Esta jornada marcó también el inicio de la presentación de diversos programas de formación de investigadores en Educación Matemática en diferentes universidades, tanto a nivel de doctorado como de máster. Como parte de esta iniciativa, se distribuyó un cuestionario a universidades de todo el mundo para recopilar información sobre la formación de investigadores, con el objetivo de establecer una red para el intercambio de información y discusión sobre el tema.

La organización de la investigación en Educación Matemática es una disciplina que cumple dos propósitos principales:

- En primer lugar, proporciona información y datos sobre el estado actual, los problemas y las necesidades de la Educación Matemática, teniendo en cuenta las diferencias nacionales y regionales.

- En segundo lugar, contribuye al desarrollo de metaconocimiento y una actitud autorreflexiva, que sirve como base para el establecimiento e implementación de programas de desarrollo en Educación Matemática.

En la quinta Conferencia, celebrada en 1991 en Paderno del Grappa, Italia, se presentó un informe preliminar sobre los resultados de la encuesta sobre la formación de investigadores. Además, se presentaron diversos trabajos sobre el papel de las metáforas y metonimias en la Matemática, la Educación Matemática y en la clase de matemáticas, así como el papel de la interacción social y el desarrollo del conocimiento desde la perspectiva de Vygotsky. Estas conferencias demuestran la amplia gama de temas estudiados dentro del campo de la Educación Matemática, incluidas las matemáticas en sí, el diseño curricular, la construcción del significado matemático por parte de los estudiantes, las interacciones profesor-alumno, la preparación de profesores y métodos de investigación alternativos.

Los objetivos de esta red (TME) incluyen explorar los desarrollos actuales en la filosofía de las matemáticas, como el falibilismo de Lakatos, y otras perspectivas humanistas. También pretenden profundizar en los aspectos filosóficos de la educación matemática, garantizando que la reflexión filosófica reciba la misma consideración que otras disciplinas de este campo. Además, su objetivo es establecer una red internacional abierta de personas interesadas en estos temas y brindar oportunidades para el intercambio y avance de ideas y perspectivas. La red busca fomentar la comunicación informal, el diálogo y la cooperación internacional entre profesores, investigadores y otras personas involucradas en la investigación teórica y filosófica sobre matemáticas y educación matemática.

El interés por los fundamentos teóricos y filosóficos de la educación matemática ha crecido significativamente desde 2005, particularmente después de que se celebró un foro de investigación dedicado a este tema en la Reunión Anual del Grupo PME en Melbourne. Desde entonces, numerosos investigadores han publicado diversos trabajos en la revista ZDM y el tema también ha llamado la atención en uno de los grupos de trabajo del CERME (Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática).

Este creciente reconocimiento del interés por la teoría de la educación matemática también puede verse en los manuales de investigación en este campo. Por ejemplo, Silver y Herbst (2007) ofrecen una visión general del estado de la teoría en la investigación en educación matemática en el "Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning" editado por Lester (2007). Además, Coob (2007) explora el tema "Poner la filosofía a trabajar: afrontar múltiples perspectivas teóricas" en el mismo manual.

La importancia del desarrollo de la teoría también se destaca en la primera y segunda edición del "Handbook of International Research in Mathematics Education" de English (2002) y (2008), respectivamente. Estos esfuerzos han culminado con la publicación de "Teorías de la educación matemática. Buscando nuevas fronteras" editado por Sriramn e English (Springer, 2010), que contiene 19 capítulos principales junto con prefacios y comentarios preparados por varios autores. Los temas cubiertos en este libro incluyen perspectivas sobre teorías y filosofías de la educación matemática, reflexiones sobre las teorías del aprendizaje, fundamentos teóricos y filosóficos de la investigación en educación matemática, la pluralidad de teorías de la educación matemática, la reconceptualización de la educación matemática como una ciencia de diseño, el ciclo fundamental de construcción de conceptos que subyace a diferentes marcos teóricos, símbolos y mediaciones en la educación matemática, y más.

La importancia de construir teorías es evidente, ya que sirven como guía para formular problemas de investigación e interpretar sus hallazgos. Los marcos teóricos permiten organizar el conocimiento dentro de un campo específico, lo que es un paso inicial hacia una comprensión integral de las conexiones que existen en nuestras percepciones. La teorización es un requisito previo para que un área del conocimiento alcance un estatus científico y cumpla su función de explicar y predecir fenómenos. De hecho, se puede argumentar que la investigación científica significativa siempre está guiada por una teoría, incluso si no se establece explícitamente.

Como sugiere Mosterín (1987), las teorías nos permiten traer orden conceptual al mundo caótico e informe, permitiéndonos reducir la complejidad a una fórmula. Nos proporcionan herramientas para la extrapolación, la explicación y, en última instancia, un medio para comprender y ejercer control sobre el mundo, incluso si se trata de una comprensión y un control siempre inciertos y problemáticos.

Mosterín también ofrece una metáfora convincente, comparando las teorías con las telas de araña que nosotros, como las arañas, usamos para capturar y darle sentido al mundo. Estas redes no deben confundirse con la realidad misma, pero sin ellas, ¿cuánto más lejos estaríamos de poder captar y, en última instancia, apreciar el mundo que nos rodea? Según Lester (2010), emplear un marco teórico para conceptualizar y guiar la investigación ofrece varias ventajas importantes:

- Un marco proporciona una estructura para conceptualizar y diseñar estudios de investigación. Específicamente, ayuda a determinar la naturaleza de las preguntas que se formulan, la formulación de estas preguntas, la definición de conceptos, constructos y procesos dentro de la investigación, así como los métodos de investigación aceptables para descubrir y justificar nuevos conocimientos sobre el tema que se estudia.
- Sin un marco, los datos carecen de significado. El hecho de que un conjunto de datos pueda considerarse evidencia de algo está determinado por las suposiciones,

creencias y el contexto en el que se recopilaron los datos. Un aspecto importante de las creencias de un investigador es el marco, ya sea basado en teoría o no, que está utilizando. Este marco permite la interpretación del conjunto de datos.

- Un marco sólido nos permite ir más allá del sentido común. Una comprensión profunda, derivada del compromiso con la construcción de teorías, suele ser crucial para abordar problemas verdaderamente importantes.
- El objetivo es lograr una comprensión profunda. Como investigadores, debemos esforzarnos por obtener una comprensión integral de los fenómenos que estamos estudiando, centrándonos en cuestiones importantes en lugar de buscar únicamente soluciones a problemas y dilemas inmediatos.

El marco de investigación ayuda a desarrollar esta comprensión profunda al proporcionar una estructura para diseñar estudios de investigación, interpretar los datos resultantes y sacar conclusiones. Lester (2010) distingue entre tres tipos de marcos de investigación:

- Marcos teóricos, que guían las actividades de investigación basadas en una teoría formal que ofrece una explicación coherente y establecida de ciertos fenómenos y relaciones. Ejemplos de teorías relevantes utilizadas en el estudio del aprendizaje incluyen la teoría del desarrollo intelectual de Piaget y la teoría del constructivismo sociohistórico de Vygotsky.
- Marcos prácticos, que se basan en el conocimiento práctico acumulado por profesionales y administradores, resultados de investigaciones previas y, a menudo, ideas de la opinión pública. Estos marcos guían la investigación basándose en lo que se ha demostrado que funciona en la práctica. Las preguntas

de investigación se derivan de esta base de conocimientos y los resultados de la investigación se utilizan para respaldar, ampliar o revisar las prácticas existentes.

- Marcos conceptuales, que son modelos teóricos locales que justifican la elección de conceptos y sus relaciones en un problema de investigación particular.

Al igual que los marcos teóricos, los marcos conceptuales se basan en investigaciones previas, pero se construyen utilizando una variedad de fuentes, tanto comunes como diversas. El marco utilizado puede basarse en diferentes teorías y aspectos del conocimiento práctico, dependiendo del argumento del investigador sobre lo que es relevante e importante para el problema de investigación.

Burkhardt (1988) distingue entre dos tipos de teorías: teorías "fenomenológicas" y "teorías fundamentales". Las teorías fenomenológicas surgen directamente de los datos y proporcionan un modelo descriptivo de fenómenos específicos. Se caracterizan por su aplicabilidad limitada pero son detalladas y específicas en sus descripciones y predicciones. Pueden resultar útiles en el diseño curricular y en la comprensión de fenómenos debido a su proximidad a la realidad.

Una teoría de tipo fundamental es un marco conceptual que abarca variables y sus relaciones, capturando los elementos esenciales de un conjunto de fenómenos. Posee cualidades tanto descriptivas como predictivas y es integral dentro de un dominio claramente definido. Este tipo de teorías sirven como modelos analíticos con el objetivo de explicar una amplia gama de fenómenos utilizando una pequeña cantidad de conceptos fundamentales. La definición es particularmente aplicable a campos como la física y la biología, donde teorías como la mecánica newtoniana y la teoría genética de Mendel se alinean con este marco. Sin embargo, al examinar teorías en el ámbito de las ciencias humanas, como el "conductismo", el "constructivismo" y las "teorías del desarrollo", Burkhardt plantea preguntas sobre su naturaleza y alcance.

Si bien estas teorías ofrecen estructuras para comprender los fenómenos, carecen de integridad dentro de un dominio limitado. En consecuencia, deben usarse entendiendo que carecen de mecanismos establecidos para una integración confiable en un modelo predictivo. Burkhardt las considera descripciones demasiado simplistas de sistemas complejos, que pueden resultar potencialmente problemáticas. En el contexto de las ciencias físicas, estas teorías no pueden clasificarse como teorías integrales o incluso como modelos; más bien, son descripciones de "efectos": aspectos importantes de un sistema de comportamiento que deben tenerse en cuenta. Sin embargo, cada una de estas descripciones, por sí sola, es inadecuada y puede dar lugar a malentendidos.

La psicología de la educación en matemática

En el ámbito de la Educación Matemática también existe una importante influencia desde la perspectiva psicológica en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, este predominio del enfoque psicológico pasa por alto la importancia del equilibrio y la complementariedad con las otras disciplinas fundamentales de la Educación Matemática. Esta influencia es evidente a través de la prominencia del Grupo Internacional PME (Psicología de la Educación Matemática), que se estableció durante el Segundo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) y continúa celebrando reuniones anuales.

Entre los principales objetivos de este grupo, tal y como recogen sus estatutos, se encuentran promover la colaboración y el intercambio internacional de información científica relacionada con la Psicología de la Educación Matemática, fomentar la investigación interdisciplinar en esta área involucrando a psicólogos, matemáticos y profesores de matemáticas, y profundizar en su conocimiento. de los aspectos psicológicos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y sus implicaciones.

La revisión de los informes de investigación presentados en las reuniones anuales de la PME revela que abarcan investigaciones tanto empíricas como teóricas, cubriendo una amplia gama de temas que se extienden más allá de los estrictos límites de la psicología. Si bien no es posible proporcionar una descripción detallada de las discusiones sostenidas en estas conferencias debido a su amplitud, vale la pena mencionar el esquema de clasificación de los informes de investigación, ya que representa ampliamente las áreas actuales de enfoque dentro del campo.

La interacción cognitiva se refiere a teorías instruccionales que enfatizan el intercambio de información entre profesores y estudiantes, con el objetivo de facilitar la asimilación de información correcta por parte de los estudiantes. Esta perspectiva incluye teorías propuestas por Piaget, Bruner y Ausubel, así como aquellas que resaltan la interacción entre el contenido instruccional y los procesos y habilidades cognitivas de los estudiantes. La interacción social, por otro lado, prioriza el papel de los individuos involucrados en la instrucción como facilitadores del aprendizaje. Esta perspectiva está representada por Vygotsky y Bandura.

Por último, las teorías de interacción contextual, defendidas por Skinner, Gagné y Cronbach, entre otros, enfatizan la interacción entre individuos y variables contextuales en el proceso de instrucción. La psicología educativa es un campo de estudio que se centra en el examen científico de los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de los desafíos que pueden surgir dentro de estos contextos. Según Gimeno Sacristán (1986), existen diversas perspectivas que ven la enseñanza como una técnica derivada directamente de una teoría psicológica del aprendizaje, que le sirve de fundamento. Sin embargo, esta dependencia de la psicología se considera perjudicial para el desarrollo de un campo teórico único tanto para la Didáctica General como para la Didáctica Especial, ya que restringe su capacidad para crear sus propias teorías.

En consecuencia, la psicología educativa tiene el potencial de dominar el estudio del comportamiento humano en situaciones de enseñanza, limitando el alcance de la Didáctica. Dentro de la psicología educativa existe una rama conocida como psicología de la instrucción, la cual es definida como una "disciplina científica y aplicada que surgió de la psicología educativa y se centra en el estudio de las variables psicológicas y su interacción con el componentes de los procesos de enseñanza y aprendizaje, impartidos por materias específicas, con el objetivo de enseñar contenidos o habilidades específicas a individuos igualmente específicos, dentro de un contexto específico".

Los investigadores analizan y clasifican diferentes teorías y modelos instruccionales desde una perspectiva interaccionista en tres tipos: interacción cognitiva, social y contextual. Al considerar las cuestiones esenciales de la Educación Matemática que pueden beneficiarse de un enfoque psicológico, Vergnaud (1988) identifica el análisis de la conducta de los estudiantes, sus representaciones y los fenómenos inconscientes que ocurren en sus mentes, además de centrarse en las conductas, representaciones, y fenómenos inconscientes de profesores, padres y otros participantes. Además, destaca cuatro tipos de fenómenos que pueden estudiarse fructíferamente desde una perspectiva psicológica: la organización jerárquica de las competencias y concepciones de los estudiantes, la evolución a corto plazo de conceptos y habilidades en el aula, las interacciones sociales y los fenómenos inconscientes, y la identificación de teoremas, esquemas y símbolos reales.

Dentro del enfoque psicológico, uno de los desafíos clave es identificar teorías sobre el aprendizaje matemático que puedan servir como base para la enseñanza. La investigación sobre el aprendizaje ha proporcionado una visión limitada de muchos problemas centrales de la instrucción, y la investigación sobre la enseñanza a menudo asume suposiciones implícitas sobre el aprendizaje de los niños que no son consistentes con las teorías cognitivas actuales del aprendizaje.

Se han hecho intentos de aplicar teorías generales sobre el aprendizaje para derivar principios que puedan guiar la instrucción. Sin embargo, la instrucción basada en el conductismo tiende a fragmentar el currículo en partes aisladas que pueden aprenderse mediante refuerzo, lo que no conduce a una instrucción matemática eficaz que requiere una comprensión de conceptos matemáticos fundamentales. De manera similar, las teorías del aprendizaje derivadas de la epistemología genética de Piaget no han explicado adecuadamente la capacidad de los niños para aprender conceptos y habilidades matemáticas.

Esta expansión del campo de interés de la PME ha llevado a algunos, como Fischbein (1990), a sugerir que la psicología de la educación matemática se está convirtiendo en el paradigma de la educación matemática en su conjunto. Fischbein sostiene que la simple adopción de cuestiones, conceptos, teorías y metodologías de la psicología general no ha dado los resultados esperados. Explica que la psicología no es una disciplina deductiva, por lo que la aplicación de principios generales a un dominio específico no suele conducir a descubrimientos significativos.

Incluso los dominios de la psicología estrechamente relacionados con la educación matemática, como la resolución de problemas, la memoria, las estrategias de razonamiento, la creatividad, la representación y la imaginación, no proporcionan directamente recomendaciones útiles y prácticas para la educación matemática y pueden no ser la fuente principal de problemas en este campo. Así, la dinámica del simbolismo matemático requiere un sistema específico de conceptos más allá de los inspirados en la psicología general.

Asimismo, los conceptos psicológicos habituales adquieren nuevos significados en el contexto de las matemáticas y la educación matemática. Un supuesto fundamental que subyace a la investigación actual sobre el aprendizaje se deriva de los estudios cognitivos, que sugieren que los niños construyen activamente conocimientos a través de su interacción con el entorno y la organización de sus propios constructos mentales. Si bien la instrucción ciertamente influye en lo que aprende un niño, no determina su aprendizaje.

El niño es un participante activo en el proceso de adquisición de conocimientos, interpretando, estructurando y asimilando información a partir de sus propios marcos mentales. Como señala Vergnaud, la mayoría de los psicólogos interesados en la educación matemática hoy en día pueden considerarse constructivistas en algún sentido, ya que creen que los propios estudiantes construyen competencias y concepciones.

Según Kilpatrick (1987), el punto de vista constructivista implica dos principios: el conocimiento es construido activamente por el alumno y no se recibe pasivamente del entorno, y el proceso de adquisición de conocimiento organiza el propio mundo experiencial en lugar de descubrir un mundo independiente y preexistente. mundo externo a la mente del alumno. Sin embargo, cabe señalar que no todas las investigaciones en el campo se alinean con esta perspectiva. Además de los problemas psicológicos iniciales que enfrentó el grupo PME, el debate en torno a la investigación ha puesto de relieve la necesidad de considerar nuevos aspectos.

Dos aspectos destacables incluyen la especificidad del conocimiento matemático y la dimensión social. Para estudiar el aprendizaje del álgebra, la geometría o el cálculo es necesario realizar un análisis epistemológico profundo de los conceptos matemáticos involucrados. También es importante reconocer que el significado de estos conceptos no se basa únicamente en su definición formal, sino más bien en los procesos involucrados en su operación. Por lo tanto, la atención debería centrarse en estudiar los procesos cognitivos de los estudiantes en lugar de sus habilidades o producciones actuales.

La dimensión social es otro factor crucial a considerar en la investigación sobre la psicología de la educación matemática. El estatus social del conocimiento que se enseña y el papel de las interacciones sociales en el proceso de enseñanza requieren una cuidadosa consideración. Pasar de estudios centrados en el niño a estudios centrados en el estudiante como aprendiz en el aula es un paso significativo en el desarrollo de la investigación en este campo.

El estudiante es un niño involucrado en un proceso de aprendizaje dentro de un ambiente específico, donde las interacciones sociales con sus compañeros y el maestro juegan un papel vital. Esta evolución del problema de investigación requiere el desarrollo de observaciones más sistemáticas del aula y la organización de procesos de enseñanza específicos. También requiere el uso de nuevas herramientas teóricas y metodológicas para producir resultados sólidos que tengan importancia tanto teórica como práctica.

Sin embargo, la falta de especificidad entre los investigadores con respecto a las condiciones físicas y sociales en las que se adquiere el conocimiento permite una amplia gama de puntos de vista epistemológicos. Estos van desde el constructivismo simple, que sólo reconoce un principio, hasta el constructivismo radical, que acepta ambos principios y niega la capacidad de la mente para reflejar aspectos objetivos de la realidad. También existe el constructivismo social, que enfatiza la importancia del conflicto cognitivo en la construcción de la objetividad.

Según Vergnaud, la solución a este dilema epistemológico es bastante simple: la construcción del conocimiento implica formar gradualmente representaciones mentales que son homomórficas a la realidad en algunos aspectos pero no en otros. Desde una perspectiva metodológica, los científicos cognitivos observan en detalle los procesos de resolución de problemas de los individuos, buscando patrones en su comportamiento e intentando caracterizar estos patrones con suficiente precisión para que los estudiantes los utilicen como guías para la resolución de problemas.

Su objetivo es construir "modelos de proceso" de la comprensión de los estudiantes, que luego se prueban utilizando programas informáticos que simulan el comportamiento del solucionador. Como educadores matemáticos, debemos cuestionarnos si la metáfora informática explica adecuadamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y qué implicaciones tienen las teorías del procesamiento de la información para la enseñanza matemática.

Kilpatrick advierte contra la dependencia excesiva de la metáfora informática, recordándonos que la educación no debería consistir únicamente en transmitir información. Si bien la metáfora de la información puede resultar útil, es importante reconocer que existen diferentes tipos de información y que algo se pierde cuando la educación se define únicamente en términos de adquisición de información. Algunos autores proponen un enfoque diferente a los procesos de resolución de problemas y de enseñanza-aprendizaje, uno que asigna un papel más activo al solucionador y tiene en cuenta las especificidades del contenido matemático, así como el papel del solucionador.

Cuando se trata del aprendizaje de las matemáticas y el procesamiento de la información, actualmente no existe una teoría ampliamente aceptada que abarque todos los detalles necesarios. Se identifican dos enfoques principales de investigación en este campo: el constructivismo, como se mencionó anteriormente, y el enfoque de ciencia cognitiva - procesamiento de información, que ha tenido un impacto significativo en el estudio del aprendizaje matemático.

Schoenfeld (1987) afirma que la hipótesis subyacente de la ciencia cognitiva es que las estructuras mentales y los procesos cognitivos son complejos pero pueden entenderse, lo que conduce a una mejor comprensión del pensamiento y el aprendizaje. El objetivo principal es explicar qué constituye el "pensamiento productivo" o la capacidad de resolver problemas significativos. La ciencia cognitiva utiliza la metáfora de la mente como computadora para entender la cognición como procesamiento de información y, en consecuencia, para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El cerebro y la mente se comparan con la computadora y su programa, donde la cognición se lleva a cabo mediante un mecanismo de procesamiento central controlado por un sistema ejecutivo que mantiene la conciencia de sus acciones. Los modelos mentales se consideran similares a los modelos de computadora de propósito general con un procesador central capaz de almacenar y ejecutar programas. En estos modelos, la mente se considera unitaria, con estructuras mentales y operaciones invariantes en diferentes contenidos. Se cree que un único mecanismo subyace a la capacidad de resolver una clase particular de problemas.

La resolución de problemas

A pesar de la atención prestada a la investigación sobre resolución de problemas, existen dudas sobre su relevancia para la práctica escolar. Algunos argumentan que enseñar a los estudiantes estrategias y fases de resolución de problemas tiene poco impacto en su capacidad para resolver problemas matemáticos generales. Esto plantea la pregunta de por qué la resolución de problemas es tan difícil para la mayoría de las personas en matemáticas. Desde nuestra perspectiva, la resolución de problemas no es sólo un objetivo de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje.

Los estudiantes deben tener oportunidades regulares para participar en tareas desafiantes de resolución de problemas, lo que les ayudará a desarrollar habilidades de pensamiento crítico, perseverancia, curiosidad y confianza en situaciones desconocidas. La resolución de problemas debe integrarse en el plan de estudios de matemáticas y no tratarse como un componente separado. Debe estar conectado con el estudio de diferentes áreas de contenido matemático e incorporar contextos que sean relevantes para la vida de los estudiantes y otras disciplinas. Sin embargo, faltan estudios que exploren el desarrollo conceptual que surge de la resolución de problemas y su interacción con el desarrollo de competencias para la resolución de problemas.

La resolución de problemas se ha convertido en los últimos años en un área importante de investigación en educación matemática. Esta investigación fue impulsada inicialmente por el influyente trabajo de Polya en 1945, que condujo a una gran cantidad de estudios sobre temas como la resolución de problemas simulados por computadora, la resolución de problemas expertos, estrategias, heurísticas, procesos metacognitivos y planteamiento de problemas. Más recientemente, ha habido un énfasis creciente en el modelado matemático en los grados de escuela primaria y secundaria, así como en la resolución de problemas interdisciplinarios. Muchos de los primeros estudios se centraron en los típicos problemas planteados que se encuentran en los textos y exámenes escolares.

Estos problemas pueden ser rutinarios, que requieren métodos de cálculo estándar, o no rutinarios, que implican encontrar una solución cuando el camino no es obvio. Los problemas no rutinarios son particularmente desafiantes para los estudiantes. La importancia otorgada a la resolución de problemas en el currículo y la investigación educativa surge de la creencia de que la resolución de problemas es el núcleo de las matemáticas. Autores como Lakatos y Polya han contribuido a esta perspectiva, y Polya describe cuatro fases de la resolución de problemas: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución.

El libro de Polya ha sido muy considerado por los educadores de matemáticas como un recurso valioso para mejorar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas no rutinarios y abordar la pregunta común de qué hacer cuando se atasca en un problema. Sin embargo, mientras que el trabajo de Polya describe al solucionador de problemas ideal, la investigación de Schoenfeld se centra en el comportamiento real de los solucionadores de problemas reales. Schoenfeld sugiere que la instrucción en resolución de problemas debería ayudar a los estudiantes a desarrollar un repertorio de estrategias específicas para diferentes tipos de problemas, promover estrategias metacognitivas para la autorregulación y trabajar para mejorar las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y la resolución de problemas.

Las perspectivas socioculturales analizadas por Sierpinska y Lerman resaltan la importancia de considerar el contexto social y cultural en la investigación en educación matemática. Comprender el papel de los factores sociales, la mediación de las herramientas y el desarrollo de la conciencia puede contribuir a un enfoque más integral y eficaz de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Un enfoque de investigación que se ha desarrollado en esta línea es la Teoría de la Actividad. Esta teoría enfatiza el papel de la persona actuante y la mediación de significado entre el individuo y el mundo. Para el niño, la sociedad y la cultura están mediadas a través de herramientas, particularmente herramientas culturales.

El pensamiento y el lenguaje se consideran relacionados dialécticamente, ya que el lenguaje proporciona al niño significados histórico-culturales heredados, pero estos significados se reconfiguran continuamente a través de la comunicación y la acción intersubjetivas. En los últimos años, ha habido un creciente interés en el contexto social del aula de matemáticas en la investigación en educación matemática.

El papel del contexto social en el desarrollo de individuos o grupos se ha teorizado de diversas maneras. Sin embargo, el enfoque actual ha pasado de identificar factores sociales en el dominio afectivo a comprender el impacto del entorno social y cultural general en el desarrollo infantil. En su revisión de 1996 de las epistemologías en la educación matemática, Sierpinska y Lerman discuten las visiones socioculturales que se han aplicado al campo de la investigación. El término "sociocultural" se refiere a epistemologías que ven a los individuos situados dentro de culturas y situaciones sociales, por lo que es necesario considerar el contexto y la actividad cuando se habla de conocimientos o individuos.

El conocimiento se considera producido culturalmente, sujeto a cambios e influenciado por valores y regulaciones sociales. A Vygotsky y sus seguidores, por otra parte, les preocupaba principalmente el aprendizaje y la enseñanza. Vygotsky no profundizó en la naturaleza de las matemáticas ni de otras formas de conocimiento, excepto en la psicología, que pretendía redefinir como una ciencia materialista. Su principal objetivo era el desarrollo de la conciencia, que creía que estaba impulsada por la comunicación y el aprendizaje.

Vygotsky identificó dos tipos de pensamiento: el pensamiento ordinario o espontáneo, que ocurre informalmente a través de interacciones con pares y adultos, y el pensamiento científico o teórico, que apunta conscientemente a enseñar y aprender a través de la apropiación del conocimiento cultural por parte del niño. Un aspecto importante del enfoque de Vygotsky es el reconocimiento de que los individuos y el mundo que habitan son productos de su tiempo y lugar. La psicología de un individuo, expresada como conciencia, está moldeada por la mediación de herramientas, que están influenciadas por el contexto social, histórico y cultural.

Esta perspectiva desafía la dualidad cartesiana y enfatiza la interconexión del sujeto y el objeto. Con base en esta comprensión, se sostiene que no existe un paralelismo entre los obstáculos epistemológicos en matemáticas y los obstáculos cognitivos en el aprendizaje. Por ejemplo, el concepto de números negativos enfrentó obstáculos epistemológicos en el desarrollo de las matemáticas en Occidente, pero hoy los niños pueden aprender sobre los números negativos sin recrear esa lucha histórica.

Esto sugiere que no existe ninguna razón inherente para suponer un paralelo similar entre los obstáculos epistemológicos y cognitivos. Vygotsky introdujo el concepto de zona de desarrollo próximo, que se refiere a la diferencia entre lo que un niño puede hacer de forma independiente y lo que puede lograr con la ayuda de un compañero o un adulto experimentado. Este concepto resalta la importancia de aprender con otros y sugiere que el aprendizaje conduce al desarrollo.

La perspectiva contradice la creencia de Piaget de que el desarrollo, representado por etapas del desarrollo infantil, impulsa el aprendizaje. Vygotsky también enfatizó el proceso de internalización, que implica la formación de la conciencia a través de la mediación de herramientas que son expresiones de la situación social, histórica y cultural. Este punto de vista integra la enseñanza y el aprendizaje a nivel escolar.

Lave introdujo el concepto de conocimiento en acción, que contrasta con una perspectiva cognitiva y enfatiza el papel del contexto en las prácticas matemáticas. Sus estudios se centraron principalmente en la aplicación de habilidades matemáticas en la vida cotidiana y situaciones laborales. Lave criticó el enfoque tradicional de las matemáticas escolares, que prioriza técnicas y habilidades generalizables, argumentando que debería ser más relevante para la vida cotidiana.

El concepto de socioepistemología se utiliza principalmente en la comunidad matemática educativa latinoamericana. Es un marco teórico que sugiere examinar la producción y difusión del conocimiento matemático desde diversas perspectivas. Este marco se originó a partir de la investigación realizada por Cantoral, Farfán y otros académicos de la Sección de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV (IPN, México).

La socioepistemología no sólo ofrece una comprensión ampliada de la epistemología, enfatizando la relatividad socioepistémica de los significados de los objetos matemáticos en línea con otros puntos de vista socioculturales, sino que también proporciona un enfoque sistemático para estudiar las interacciones entre esta comprensión matemática y los aspectos cognitivos e instruccionales. Se propone el examen del conocimiento matemático teniendo en cuenta su contexto social, histórico y cultural, explorando cómo fue construido y difundido. Además de reconocer la resolución de problemas como un aspecto fundamental de las matemáticas, también se reconoce la necesidad de explicar los factores socioculturales involucrados en la construcción del conocimiento matemático, el papel de las herramientas utilizadas y las diversas interpretaciones de los objetos matemáticos.

La investigación actual en Educación Matemática se centra significativamente en la idea de que los procesos de enseñanza y aprendizaje deben apuntar a empoderar a los individuos y lograr una transformación social. Para lograrlo, es necesario promover estrategias que fomenten la reflexión sobre la práctica por parte de los individuos involucrados, lo que puede conducir a cambios significativos en los enfoques de enseñanza. Un ejemplo de un programa de investigación que se alinea con esta perspectiva se conoce como "Educación en Matemática Crítica". Este enfoque presenta una agenda para estudiar la relación entre la educación matemática y la democracia. Algunos de los aspectos clave enfatizados por la teoría crítica incluyen:

- preparar a los estudiantes para que sean ciudadanos activos;
- utilizar las matemáticas como herramienta para analizar críticamente cuestiones socialmente relevantes;
- considerar los intereses y perspectivas de los estudiantes;
- tener en cuenta los conflictos culturales que puedan surgir en el proceso de instrucción;
- aprovechar experiencias previas en la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas para desarrollar habilidades de pensamiento crítico; y
- darle importancia a la comunicación dentro del aula, ya que forma la base de las interacciones democráticas.

Otra área de preocupación dentro de la educación matemática crítica es la intersección entre matemáticas y tecnología, que, si bien resuelve problemas, también genera nuevos desafíos. Desde una perspectiva sociocrítica, se anima a los docentes a cambiar su papel de meros facilitadores a constructores activos de conocimientos. Se argumenta que los docentes tienen la capacidad y deben participar en el desarrollo de una teoría pedagógica basada en la investigación educativa, cerrando la brecha que tradicionalmente ha separado la teoría y la práctica, donde la teoría generalmente se deja a los investigadores y la práctica a los docentes en su trabajo diario.

El investigador se convierte en un actor comprometido con lograr el cambio. La investigación-acción participativa se utiliza a menudo como metodología de investigación en este contexto. La investigación acción, cuando se aplica en el ámbito escolar, implica estudiar una situación social en la que profesores y estudiantes participan activamente para mejorar la calidad de sus acciones. Esto se hace a través de un proceso cíclico de identificación de problemas, planificación, implementación, reflexión y evaluación de los resultados.

Se ha prestado cada vez más atención al uso de la semiótica, la "ciencia de los signos", para describir y comprender la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este interés está impulsado por varios factores:

- En primer lugar, existe un reconocimiento creciente de que la actividad matemática es fundamentalmente una actividad simbólica debido a la generalidad de los objetos matemáticos.
- En segundo lugar, la comprensión de la comunicación en el aula ha enfatizado la importancia de comprender la naturaleza del discurso matemático para investigadores y profesores.
- La semiótica proporciona una teoría adecuada para dar cuenta de la complejidad de la comunicación.
- Además, el uso cada vez mayor de la tecnología en la educación matemática ha llevado a la exploración de la semiótica como un medio para comprender el papel cognitivo de los artefactos.
- La semiótica es muy adecuada para esta tarea debido a su enfoque en las convenciones y significados culturales asociados con signos y artefactos.

Las ideas únicas que aporta una perspectiva semiótica a la comprensión de la comunicación y el aprendizaje en matemáticas, tiene como objetivo modelar el papel de los sistemas de signos matemáticos, las estructuras de significados, las reglas matemáticas y las motivaciones detrás de la actividad matemática dentro de un marco coherente. El uso de la semiótica en el estudio de la actividad matemática se justifica dado el papel esencial de los signos en matemáticas.

Los signos, símbolos y notaciones desempeñan un papel similar en la comunicación de ideas matemáticas tanto en contextos educativos como en procesos de aprendizaje. La perspectiva semiótica se diferencia de las perspectivas psicológicas al centrarse en los signos y su uso en lugar de únicamente en las estructuras y funciones mentales. Abarca las dimensiones individual y social de la actividad, la enseñanza y el aprendizaje matemático al considerar las matemáticas como un acto comunicativo.

Los sistemas semióticos, que consisten en signos, reglas de producción de signos y las relaciones entre signos y significados, se consideran integrales para comprender el uso de los signos en matemáticas. Godino y sus colaboradores han desarrollado un "enfoque ontosemiótico" para la educación matemática que reconoce el papel fundamental del lenguaje, la semiótica y las cuestiones ontológicas en la descripción y comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Consideran que los objetos matemáticos surgen de los sistemas de prácticas utilizados para resolver problemas específicos, y esta perspectiva complementa las perspectivas semióticas existentes en la educación matemática.

Una parte importante de la investigación en el campo de la educación matemática se centra en examinar las conexiones entre profesores, estudiantes y las tareas matemáticas en las clases de matemáticas. El objetivo es encontrar respuestas bien fundadas a preguntas como cómo los profesores y los estudiantes desarrollan una comprensión compartida de los conceptos matemáticos para garantizar un flujo fluido de la clase.

Asimismo, los investigadores investigan cómo los estudiantes comprenden y responden a las intervenciones del maestro. Para abordar estas cuestiones, es esencial desarrollar perspectivas teóricas que puedan interpretar y analizar eficazmente la naturaleza intrincada de las clases de matemáticas. Algunas de las cuestiones clave que aborda el interaccionismo en la educación matemática incluyen: cómo se forman interactivamente los significados matemáticos en diferentes culturas del aula, cómo se estabilizan estos significados y cómo se ven influenciados por el tipo de cultura del aula en la que evolucionan.

El programa interaccionista introduce conceptos como dominios de experiencia subjetiva, patrones de interacción y normas sociomatemáticas. La noción de dominios de la experiencia subjetiva, desarrollada por Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988), adapta conceptos psicológicos como "guión", "marco", "sistema experto" y "micromundo" al estudio del aprendizaje matemático. Según este modelo, los individuos forman experiencias dentro de contextos y situaciones específicas, incorporando aspectos cognitivos, emocionales y motores. Luego, estas experiencias se almacenan en la memoria como dominios distintos de experiencia subjetiva, reflejando la complejidad y relevancia de la situación tal como la percibe el individuo.

El interaccionismo simbólico (I.S.) es una perspectiva teórica que se ha utilizado para examinar estas relaciones y tiene implicaciones analíticas. Afirma que las dimensiones culturales y sociales no son periféricas al aprendizaje matemático sino más bien intrínsecas a él. Según Sierpinska y Lerman (1996), quienes sintetizaron el programa interaccionista aplicado a la educación matemática, el interaccionismo es un enfoque que promueve una comprensión sociocultural de las fuentes y el desarrollo del conocimiento.

El foco de estudio está en las interacciones entre individuos dentro de una cultura, con énfasis en la construcción subjetiva del conocimiento a través de la interacción. Esta perspectiva supone que los procesos culturales y sociales son parte integral de la actividad matemática. Un enfoque, como sugiere Bauersfeld (1994), es utilizar constructos teóricos de la sociología y la lingüística, como la etnometodología, el interaccionismo social y el análisis del discurso. Sin embargo, dado que estas disciplinas no abordan directamente la enseñanza y el aprendizaje del contenido curricular, se requiere cierta traducción para abordar las cuestiones específicas dentro de la educación matemática.

Este enfoque se basa en la premisa de que en el aula surgen diferentes prácticas dependiendo de si las matemáticas son vistas como una colección de verdades objetivas o como un proceso de matematización compartida. Esta última perspectiva enfatiza la importancia de la "constitución interactiva" del significado en las aulas, destacando las relaciones entre las características sociales de los procesos de interacción y el pensamiento tanto de profesores como de estudiantes.

Los fundamentos de la perspectiva interaccionista se pueden resumir de la siguiente manera: el profesor y los estudiantes dan forma interactivamente a la cultura del aula, las convenciones y acuerdos surgen a través de procesos interactivos, y la comunicación se basa en la negociación y los significados compartidos. Los objetivos de la investigación dentro del programa interaccionista en educación matemática, como lo afirman Sierpinska y Lerman (1996), son lograr una mejor comprensión de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje en contextos escolares ordinarios. El objetivo principal no es desarrollar teorías para la acción o diseñar acciones didácticas, sino más bien describir y discutir diferentes posibilidades. La investigación no pretende mejorar la microcultura de las aulas individuales de la misma manera que puede influir en el currículo matemático o la macrocultura caracterizada por principios generales y estrategias de enseñanza.

Negociar el significado de una situación particular puede ser frágil y propenso a diferentes interpretaciones debido a la ambigüedad. Incluso si existe un contexto compartido, siempre existe el riesgo de colapso y desorganización durante el proceso interactivo. Para minimizar este riesgo, se forman patrones de interacción. Estos patrones son considerados regularidades que se crean a través de la interacción entre el docente y los estudiantes, buscando hacer las interacciones humanas más predecibles y menos riesgosas en su organización y desarrollo. Además, las interacciones entre docentes y alumnos suelen estar guiadas por normas u obligaciones implícitas. Desde una perspectiva interaccionista, el uso del lenguaje es crucial, enfatizando la importancia de negociar significados en el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes y sus creencias y actitudes hacia las matemáticas.

Capítulo 4

La didáctica fundamental

En los últimos años, ha habido un crecimiento notable en el interés y la investigación en torno a la Educación Matemática. Un grupo de investigadores, entre los que se incluyen figuras notables como Brousseau, Chevallard y Vergnaud, han estado trabajando para desarrollar una comprensión teórica de la didáctica de las matemáticas. El enfoque, conocido como la concepción "fundamental" de la Didáctica, se distingue de otros enfoques al enfatizar una visión global de la enseñanza, una fuerte conexión con las matemáticas, teorías de aprendizaje específicas y una búsqueda de paradigmas de investigación únicos.

Esta línea de investigación tiene como objetivo establecer un marco teórico original, desarrollando conceptos y métodos propios, y considerando las situaciones de enseñanza-aprendizaje de manera integral. La investigación de estas cuestiones requiere un enfoque metodológico que implica la experimentación en una interacción dialéctica con la teoría. Las observaciones experimentales se comparan con el marco teórico y se pueden realizar ajustes en función de la coherencia de los conceptos desarrollados y su exhaustividad en relación con los fenómenos relevantes.

El enfoque de la Didáctica de las Matemáticas se fundamenta en una visión sistémica, considerando el funcionamiento global de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje. Reconoce que el estudio separado de los componentes individuales no puede explicar completamente el funcionamiento general, al igual que los fenómenos económicos o sociales. Chevallard y Johsua describen el Sistema Didáctico como compuesto por tres subsistemas principales: el profesor, el alumno y el conocimiento enseñado. Además, el sistema está influenciado por el mundo exterior a la escuela, incluida la sociedad, los padres y los matemáticos. La zona intermedia, conocida como noosfera, es un lugar de conflictos y transacciones que facilita la articulación entre el sistema y su entorno. Abarca a todos los individuos de la sociedad que reflexionan sobre el contenido y los métodos de enseñanza. También se incluye como componente los medios de comunicación, que consisten en los materiales, juegos y situaciones didácticas con las que interactúa el estudiante.

Esta línea de investigación en Didáctica de la Matemática busca comprender la producción y comunicación del conocimiento matemático, centrándose en las características específicas de estos procesos. Considera los fenómenos de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva sistémica y enfatiza la interacción entre el maestro, el estudiante y el conocimiento enseñado. El desarrollo de un marco teórico original, el uso de la experimentación junto con la teoría y la exploración de diversos conceptos y métodos son aspectos clave de este enfoque.

Los modelos que se han desarrollado incluyen la exploración de dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas. Se esfuerzan por comprender las complejas interacciones entre el conocimiento, los estudiantes y los profesores dentro del contexto del aula. Un investigador, Laborde, ha planteado dos cuestiones importantes en relación con el estudio de la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas. En primer lugar, ¿cómo se pueden caracterizar las condiciones para una enseñanza eficaz para facilitar tipos específicos de aprendizaje? Y en segundo lugar, ¿qué elementos deberían incluirse en la descripción de un proceso de enseñanza para garantizar que pueda replicarse en términos del aprendizaje que induce en los estudiantes? Estas preguntas guían la investigación y enfatizan la importancia de determinar el conocimiento matemático que los estudiantes desean construir y compararlo con lo que realmente se logra durante el proceso de enseñanza.

La teoría que estamos discutiendo abarca su propia perspectiva sobre el aprendizaje matemático, basándose en un enfoque piagetiano que enfatiza la construcción del conocimiento a través de la interacción continua entre el alumno y la materia. Sin embargo, esta teoría se distingue de otras teorías constructivistas por su particular enfoque en la relación entre el estudiante y el conocimiento. Si bien el contenido sirve como base para el desarrollo de estructuras mentales, el punto de vista didáctico añade otra capa de importancia al estudio de la relación estudiante-conocimiento.

La principal preocupación de la investigación es la exploración de las condiciones bajo las cuales se forma el conocimiento, con el objetivo final de optimizarlo, controlarlo y reproducirlo en entornos educativos. Esto requiere prestar especial atención al objeto de interacción entre el estudiante y el conocimiento, es decir, la situación de resolución de problemas, y cómo los profesores manejan esta interacción. El reconocimiento del papel crucial que desempeñan los aspectos situacionales, el contexto y la cultura en la configuración de las conductas cognitivas de los estudiantes se destaca en el campo de la Psicología de la Educación Matemática, aunque esta dimensión situacional a menudo se pasa por alto como un área de investigación separada.

Sin embargo, la Teoría de las situaciones didácticas de G. Brousseau se erige como una iniciativa que aborda esta laguna. La relación con el conocimiento se examina desde una perspectiva de la relatividad, considerando que el conocimiento puede variar dependiendo del contexto institucional. Por ejemplo, se puede considerar que alguien tiene conocimientos de probabilidad dentro del ámbito de la educación escolar, pero no dentro del ámbito académico, e incluso dentro del mundo académico existen más distinciones basadas en los diferentes niveles de experiencia requeridos.

Por lo tanto, es necesario diferenciar entre la relación institucional con el conocimiento (lo que se considera aceptable dentro de una institución particular) y la relación personal con el conocimiento (la comprensión que un individuo tiene de un tema determinado), que puede o no alinearse con la perspectiva institucional. De estos conceptos surgen dos preguntas fundamentales:

- ¿Qué condiciones aseguran la integración exitosa de un elemento específico de conocimiento y sus relaciones institucionales y personales?
- ¿Qué restricciones podrían obstaculizar el cumplimiento de estas condiciones?

El estudio de la relación institucional con el conocimiento, sus condiciones y sus efectos se considera el problema central de la Didáctica. Si bien el estudio de las relaciones personales con el conocimiento es crucial en la práctica, se considera epistemológicamente secundario. Aunque, este programa de estudio no puede tener éxito sin considerar los diversos factores condicionantes (cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos, etc.) que pueden influir o afectar la relación personal de un estudiante con el conocimiento en cuestión.

La relatividad del conocimiento dentro de las diferentes instituciones da lugar al concepto de transposición didáctica, que se refiere al proceso de adaptación del conocimiento matemático para hacerlo apto para la enseñanza. En la fase inicial de transposición, el conocimiento matemático se transforma en conocimiento pedagógico. Esto implica pasar de describir los usos de un concepto a describir el concepto en sí y las ventajas organizativas que ofrece. El proceso de transposición didáctica implica descontextualizar el concepto y remover su contexto histórico, presentándolo así como una realidad atemporal y desligada de su origen, utilidad o relevancia.

Una vez que se introduce el concepto, toma el relevo la operación didáctica, utilizándolo con fines educativos que no necesariamente se alinean con las intenciones originales de sus creadores. A medida que el concepto se integra al conocimiento enseñado, sufre un proceso de recontextualización. Sin embargo, en los primeros niveles educativos, esta recontextualización puede no restaurar completamente el modo de existencia original del concepto ni cumplir todas las funciones previstas para su introducción.

Para profundizar más en el tema de la probabilidad condicional, vale la pena mencionar que los textos de Bachillerato a menudo introducen un concepto llamado "evento condicionado", que no se encuentra típicamente en el cálculo de probabilidad académico. Este concepto se refiere al evento donde ocurre B dado que A ya ocurrió, y se denota como B/A. Sin embargo, es importante señalar que el álgebra de eventos siempre es isomorfa a un álgebra de conjuntos, lo que significa que las operaciones disponibles se limitan a unión, intersección y diferencia.

El estudio de la transposición didáctica se centra en identificar y analizar estas diferencias y comprender las razones detrás de ellas, con el fin de rectificar cualquier idea errónea y garantizar que los objetos matemáticos se comprendan correctamente en la enseñanza. La breve descripción que hemos proporcionado de algunas nociones teóricas desarrolladas por los didácticos franceses sirve como ejemplo de cómo la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas está estableciendo una base sólida de conceptos teóricos.

Estos conceptos forman la base de un programa de investigación similar al enfoque de Lakatos. La capacidad de los investigadores en este campo para plantear nuevos problemas de investigación y ofrecer nuevas perspectivas sobre problemas clásicos es evidente en su producción científica. Términos como transposición didáctica, contrato didáctico y obstáculo son cada vez más utilizados en publicaciones y congresos internacionales centrados en la Didáctica de las Matemáticas. Es innegable que Francia tiene una línea de investigación distinta en este campo, como lo demuestra el trabajo de Balachef, que representa un avance epistemológico para esta disciplina científica. Queda por ver si esta línea de investigación acabará convirtiéndose en el paradigma predominante en el futuro.

Hans Freudenthal es un autor estimado en el campo de la educación matemática que ha realizado importantes contribuciones al tema. Su libro, "Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas", es ampliamente considerado como un recurso valioso para la investigación didáctica, el desarrollo curricular y la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Dos conceptos clave introducidos por Freudenthal siguen generando interés y reflexión: la "fenomenología didáctica" y la "constitución de los objetos mentales".

Freudenthal critica el enfoque de adquisición de conceptos, que cree que ve las matemáticas como estructuras conceptuales separadas de sus orígenes culturales y de resolución de problemas. En los métodos de enseñanza tradicionales, el énfasis está en que los estudiantes aprendan matemáticas como un producto terminado, desprovisto de su aplicación práctica. Freudenthal aboga por priorizar la fenomenología, las situaciones problemáticas que impulsan la acción matemática y el desarrollo de estrategias de resolución de problemas. Estas situaciones problemáticas permiten a los estudiantes comenzar a constituir "objetos mentales", que son estructuras cognitivas personales que luego pueden enriquecerse con una comprensión discursiva y cultural de las matemáticas.

La constitución de los objetos mentales, tal como la analiza Freudenthal, desafía el enfoque convencional de intentar inculcar conceptos matemáticos abstractos en los estudiantes sin proporcionar ejemplos o experiencias concretas. Freudenthal sostiene que intentar materializar conceptos desnudos mediante la concretización a menudo resulta insuficiente, ya que las concreciones suelen ser representaciones inadecuadas de las características esenciales de los conceptos.

En cambio, Freudenthal sugiere comenzar con fenómenos que exigen organización y enseñar a los estudiantes cómo manipular los medios de organización desde ese punto de partida. Este enfoque invierte el método tradicional de enseñar abstracciones al hacerlas concretas. Para implementar este enfoque de manera efectiva, es necesaria la asistencia de la fenomenología didáctica para desarrollar planes y estrategias. La fenomenología didáctica, tal como la define Freudenthal, implica el uso de conceptos, estructuras e ideas matemáticas para organizar fenómenos tanto en el mundo real como en las matemáticas mismas.

Por ejemplo, las figuras geométricas como triángulos, paralelogramos, rombos y cuadrados nos ayudan a organizar los fenómenos de contorno, mientras que los números organizan el fenómeno de cantidad. En un nivel superior, las construcciones y demostraciones geométricas organizan el fenómeno de las figuras geométricas, y el sistema decimal organiza el fenómeno de los números. La fenomenología de un concepto o estructura matemática, según Freudenthal, implica describir su relación con los fenómenos que organiza, identificar los fenómenos para los que fue creado y a los que puede extenderse, comprender cómo actúa como medio de organización y reconocer el poder. nos da sobre esos fenómenos.

Cuando el foco está en cómo se adquiere esta relación en un proceso de enseñanza y aprendizaje, se habla de fenomenología didáctica de ese concepto o estructura. En consecuencia, el trabajo de Hans Freudenthal destaca la importancia de la fenomenología didáctica y la constitución de objetos mentales en la educación matemática. Al comprender la relación entre los conceptos matemáticos y los fenómenos que organizan, y al comenzar con situaciones problemáticas para desarrollar estructuras cognitivas, los estudiantes pueden obtener una comprensión más profunda y significativa de las matemáticas.

El campo de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas y el currículo en Didáctica de las Matemáticas es altamente intrigante. En el ámbito práctico, el currículo y la instrucción desempeñan un papel central a la hora de mejorar los programas escolares de matemáticas y plantear importantes cuestiones de investigación. Al incorporar hallazgos de otras áreas de la Educación Matemática, particularmente teorías del aprendizaje, la investigación sobre el currículo y la instrucción apunta a comprender y mejorar sistemáticamente varios aspectos:

- la selección y organización de las ideas matemáticas a enseñar;
- la presentación de estas ideas a los estudiantes; y
- la evaluación de la efectividad del programa y el desempeño de los estudiantes.

Básicamente, busca determinar las combinaciones más efectivas de contenido, secuenciación, estrategias y sistemas de entrega para diferentes perfiles de habilidades de los estudiantes.

La complejidad de la investigación sobre currículo y enseñanza es una característica notable. En consecuencia, los diseñadores de materiales curriculares y procedimientos de instrucción a menudo se basan en la creatividad personal, los juicios intuitivos y las pruebas informales. Hay investigaciones limitadas disponibles que explican cómo el sistema puede transformar una combinación de necesidades, intereses y valores en un plan de estudios científicamente sólido. Como resultado, la selección de temas en matemáticas escolares está determinada por factores como la estructura interna de la disciplina (sin un análisis epistemológico riguroso), el interés público (medido informalmente), recomendaciones de expertos respetados y, a veces, libros de texto preparados con poca base científica.

Por lo tanto, actualmente no existe una base teórica y experimental consistente para la investigación sobre el currículo y la instrucción. La búsqueda de una teoría de la instrucción como un tema prioritario para futuras investigaciones; amerita diseñar modelos teóricos que establezcan relaciones entre variables curriculares e instruccionales clave. Si bien el objetivo principal en este campo ha sido encontrar el mejor método de instrucción, los esfuerzos por identificar procedimientos generales, estrategias de secuenciación o formatos de presentación adecuados han sido improductivos. En consecuencia, la investigación ahora se centra en análisis microscópicos del proceso curricular y en la exploración de los efectos esperados de enfoques específicos en situaciones y áreas de contenido particulares.

Otra área de investigación sobre currículo e instrucción investiga cuestiones generales independientemente del contenido específico. Así, la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza no han abordado directamente las matemáticas, y los pocos estudios que se han centrado en la enseñanza de las matemáticas apuntaban a mejorar los métodos tradicionales en lugar de alinearse con las perspectivas de la investigación cognitiva. Como resultado, estos estudios pueden tener hallazgos irrelevantes o potencialmente dañinos.

En muchos estudios de investigación sobre la enseñanza, el contenido que se enseña a menudo se pasa por alto o se considera periférico. Por lo tanto, se reconoce la necesidad de realizar investigaciones que consideren contenidos específicos y técnicas de enseñanza apropiadas para esos contenidos. En general, los estudios realizados dentro del paradigma proceso-producto para la enseñanza de las matemáticas no han proporcionado a los profesores una lista completa de conductas observables que mejorarían su competencia y asegurarían el aprendizaje de los estudiantes.

Hasta cierto punto, esto refleja las primeras etapas de lo que Kuhn (1969) llamó "ciencia normal", donde falta un paradigma o un conjunto de principios organizadores que hagan que todos los hechos sean potencialmente relevantes. Los estudios sobre la enseñanza de las matemáticas realizados bajo un paradigma interpretativo, aunque menos comunes que los enfoques positivistas, ofrecen información valiosa sobre diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas a través de diferentes lentes conceptuales. Por ejemplo, la investigación sobre el pensamiento de un profesor sobre las matemáticas y su enseñanza, y el impacto de estas creencias en sus prácticas docentes, está ganando cada vez más interés.

¿Se trata simplemente de conocimiento práctico, una tecnología que se basa y depende de otras ciencias, o es más bien que hay problemas que requieren un nivel de análisis teórico y una metodología propia del verdadero conocimiento científico? Esta reflexión epistemológica es crucial para orientar eficazmente la investigación didáctica, ya que influye en la formulación de sus preguntas centrales. Sin embargo, ha habido una discusión limitada sobre este tema en la literatura. La extrema complejidad de los problemas de la Educación Matemática, lleva a dos reacciones extremas: quienes afirman que la Didáctica de las Matemáticas no puede fundamentarse en fundamentos científicos y, por tanto, enseñar matemáticas es esencialmente un arte; y aquellos que creen que la

Didáctica puede ser una ciencia, pero sólo centrarse en un aspecto parcial de los problemas, como el análisis de contenidos, la construcción curricular, los métodos de enseñanza, el desarrollo de habilidades en los estudiantes y la interacción en el aula.

Este enfoque reduccionista conduce a diferentes definiciones y perspectivas. La Didáctica de las Matemáticas puede verse como el arte de enseñar: un conjunto de medios y procedimientos para dar a conocer las matemáticas. Sin embargo, se distingue dos concepciones científicas, a las que denomina concepción pluridisciplinar aplicada y concepción autónoma (también denominada fundamental o matemática). Como puente entre estos dos grupos también existe una concepción técnica, que considera la didáctica como técnica de enseñanza.

Desde la perspectiva de la concepción pluridisciplinaria, que se alinea con la segunda tendencia de Steiner, la didáctica se convierte en una etiqueta conveniente para las enseñanzas necesarias para la formación técnica y profesional de los docentes. La didáctica, como campo del conocimiento científico, implicaría investigaciones sobre la enseñanza dentro de disciplinas científicas establecidas como la psicología, la semiótica, la sociología, la lingüística, la epistemología, la lógica, la neurofisiología, la pedagogía, la pediatría y el psicoanálisis. En este caso, el conocimiento didáctico sería una tecnología basada en otras ciencias. La concepción autónoma busca integrar todos los significados antes mencionados y asignarles un lugar en relación con una teoría unificadora del hecho didáctico, con fundamentos y métodos específicos que apuntan a una justificación endógena.

Esta concepción puede ser el punto de partida para abordar la necesidad de una base teórica que permita una mejor comprensión e identificación de las diversas posiciones, aspectos e intenciones que subyacen a las diferentes definiciones de Educación Matemática, y para analizar las relaciones entre estas posiciones. en una comprensión dialéctica de todo el campo. La Escuela Francesa de Didáctica aspira a construir su propio campo de estudio científico, que no esté limitado y dependiente del desarrollo de otros campos científicos, que pueden no siempre ser consistentes.

Este objetivo contrasta con la posición de quienes no aboga por la búsqueda de teorías internas (teorías del hogar) debido al riesgo de restricciones inadecuadas. La naturaleza del tema y sus problemas exigen un enfoque interdisciplinario, y se cree que sería un error no hacer un uso significativo del conocimiento que otras disciplinas ya han producido sobre aspectos específicos de esos problemas. La Educación Matemática debe luchar por la transdisciplinariedad, tal como la define Piaget, que abarca no sólo interacciones o reciprocidades entre proyectos de investigación especializados, sino que también ubica estas relaciones dentro de un sistema total sin límites fijos entre disciplinas.

También se contempla la naturaleza de la investigación en educación matemática, cuestionando si los educadores matemáticos deberían verse a sí mismos como psicólogos educativos aplicados, psicólogos cognitivos aplicados o científicos sociales aplicados. Alternativamente, ¿deberían ser considerados científicos en el campo de la física u otras ciencias puras? ¿O deberían ser vistos como ingenieros u otros científicos orientados al diseño, cuya investigación se basa en múltiples perspectivas prácticas y disciplinarias, guiadas por la necesidad de resolver problemas reales y desarrollar teorías relevantes?

El análisis de Brousseau de 1988, examina cómo su concepción de la Didáctica de las Matemáticas, como teoría para comunicar el conocimiento matemático, se compara con otras perspectivas y orientaciones. Sostiene que no hay conflicto entre su teoría y otras, sino que su teoría fomenta la integración de ideas de diferentes dominios y su aplicación a la enseñanza. Esencialmente, su teoría promueve una relación sana entre ciencia y técnica, en lugar de centrarse en prescripciones y reproducciones. Brousseau no condena categóricamente ninguna acción educativa, pero advierte contra la expectativa de que la didáctica cumpla funciones que no le corresponden.

Considera que es un error imponer la didáctica en toda acción educativa, ya que esto puede generar desafíos que pueden estar más allá de sus capacidades. En el peor de los casos, esto puede dar lugar a que los expertos en el campo asuman responsabilidades para las que no están preparados, lo que daría lugar a errores similares a los observados en otras disciplinas como la economía. Como argumentó Godino en 1990, la mejora de la educación matemática depende de factores ajenos a la investigación didáctica misma, como las directrices curriculares, los procedimientos de evaluación y los materiales didácticos. Por ello, es fundamental facilitar la comunicación entre los responsables de estos factores y los investigadores, así como promover la investigación didáctica. Si bien la investigación didáctica no puede proporcionar a los docentes situaciones modelo para imitar, puede brindarles conocimientos valiosos para abordar la naturaleza desafiante de la enseñanza de las matemáticas en el aula.

Paradigmas

La concepción fundamental o matemática pretende integrar todos los significados antes mencionados y asignarles un lugar en relación con una teoría unificadora del fenómeno didáctico. Esta teoría tendría justificaciones y métodos específicos y endógenos. Esta concepción podría potencialmente abordar la necesidad destacada por Steiner de una base teórica que mejore la comprensión e identifique las diversas posiciones, aspectos e intenciones que subyacen a las diferentes definiciones de educación matemática. También analizaría las relaciones entre estas posiciones y las reuniría en una comprensión dialéctica de todo el campo.

Cuando los educadores de matemáticas o un grupo de profesores se embarcan en una investigación en su campo, se enfrentan inmediatamente al problema epistemológico de comprender la naturaleza de la Didáctica de las Matemáticas y los paradigmas metodológicos correspondientes. Estas cuestiones influyen en gran medida en la formulación de problemas de investigación y la determinación de su importancia. En nuestro caso, donde falta una tradición de investigación y paradigmas establecidos en el campo, se vuelve aún más crucial aclarar los principios que han dado forma a la Teoría de la Educación Matemática y los métodos de investigación potenciales, como dictan los tipos de investigación que se pueden realizar.

Una revisión de la literatura y la síntesis realizada por Hurford (2010) sobre la aplicación de nociones teóricas de la teoría de sistemas complejos y dinámicos para comprender los procesos de aprendizaje respalda de manera convincente las opiniones de Steiner sobre el enfoque sistémico en la educación matemática. Hurford sugiere que los investigadores educativos ahora tienen las herramientas y la oportunidad necesarias para construir modelos de aprendizaje que abarquen la complejidad inherente en formas que antes no eran factibles.

Es hora de ir más allá de los modelos simplistas que reducen el aprendizaje a pares básicos de estímulo-respuesta o a colecciones estáticas de escenas aisladas de aprendizaje de los estudiantes. Las perspectivas y modelos que ofrece la teoría de sistemas para comprender el aprendizaje nos están preparando para dar ese importante paso adelante. La complejidad de la Didáctica de las Matemáticas es su característica definitoria.

Como la describe Steiner, esta disciplina abarca el intrincado fenómeno de las matemáticas en su desarrollo histórico y contemporáneo, su interrelación con otras ciencias, áreas prácticas, tecnología y cultura. También abarca la compleja estructura de la enseñanza y la escolarización dentro de nuestra sociedad, así como las diversas condiciones y factores que influyen en el desarrollo cognitivo y social de los estudiantes.

Esta complejidad ha llevado a muchos autores a adoptar un enfoque de Teoría de Sistemas en sus consideraciones teóricas. La noción interdisciplinaria de sistema, que abrazan todas las ciencias sociales, se vuelve necesaria cuando se comprende que el funcionamiento general de un conjunto de elementos no puede explicarse únicamente por sus contribuciones individuales.

De hecho, el comportamiento de estos elementos puede incluso verse influido por su inclusión en el sistema. En el caso de la didáctica de las matemáticas, un enfoque sistémico es imprescindible. No sólo considera el sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto y los sistemas conceptuales que lo integran, sino que también tiene en cuenta los sistemas didácticos que se manifiestan en un aula.

Los principales subsistemas en este contexto son el profesor, los estudiantes y el conocimiento que se enseña. Adoptar un enfoque sistémico de los problemas didácticos es fundamental porque, destaca que la Didáctica de las Matemáticas está en el centro de múltiples interacciones y, por tanto, debe desarrollar sus propios problemas y metodologías. Sin embargo, esto no significa desconocer los aportes de disciplinas afines, particularmente la psicología y la epistemología.

Asimismo, un enfoque sistémico revela la estructura común que conecta la didáctica de varias disciplinas, pero también reconoce los desafíos únicos que plantean los diferentes dominios del conocimiento. Steiner enfatiza además que la visión sistémica de la didáctica de las matemáticas es autorreferencial, ya que incluye la educación matemática como uno de sus propios subsistemas. Esta autorreferencialidad necesita un enfoque sistémico como metaparadigma organizacional para la educación matemática, no sólo para gestionar la complejidad del campo en su conjunto sino también porque el carácter sistémico es evidente en cada problema específico dentro del campo.

De la discusión de estas concepciones se desprende que existe un debate dialéctico entre la producción de conocimiento teórico y el conocimiento práctico en didáctica. Para aclarar esta distinción se pueden utilizar las etiquetas "Didáctica Teórica" y "Didáctica Técnica (o Práctica)". La primera se refiere a la disciplina académica que pretende describir y explicar los estados y evolución de los sistemas didácticos y cognitivos, mientras que la segunda se centra en los problemas de la toma de decisiones en el aula y la acción reflexiva en contextos específicos.

La perspectiva teórica prioriza comprender el funcionamiento del sistema y descubrir leyes generales que expliquen su dinámica, ya que la aplicación de estos principios puede conducir a la solución de problemas específicos. Por otro lado, la perspectiva práctica, adoptada por investigadores y profesionales aplicados, reconoce la urgencia de resolver problemas inmediatos sin esperar a que la ciencia teórica descubra principios generales. Este debate teoría-práctica no es exclusivo de la Didáctica sino que se observa en diversas ciencias, entre ellas la medicina y la economía.

En Didáctica de las Matemáticas, tanto la concepción técnica como la multidisciplinaria adoptan un punto de vista de ciencia aplicada, apoyándose en principios teóricos generales de otras disciplinas como la psicología, la pedagogía y la sociología. La didáctica especial de las matemáticas aplica luego estos principios al dominio específico de los conceptos y habilidades matemáticas, con el objetivo de brindar soluciones para la enseñanza de las matemáticas.

En la concepción matemática o fundamental, la didáctica se presenta como una ciencia que se ocupa de la producción y comunicación del conocimiento, centrándose específicamente en los aspectos singulares de esta producción y comunicación. Los objetos de estudio en esta concepción son las operaciones esenciales de la difusión del conocimiento, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que provoca tanto en el conocimiento como en sus usuarios. Además, esta concepción examina las instituciones y actividades que apuntan a facilitar estas operaciones.

Los problemas de investigación derivados de la concepción fundamental tienden a ser de naturaleza más teórica, y a menudo implican la construcción de modelos. El objetivo final de la didáctica, según esta concepción, es construir una teoría de los procesos didácticos que proporcione un dominio práctico de los fenómenos del aula. La investigación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, al igual que otros campos como la medicina, la agricultura y la administración, requiere de una combinación de desarrollos teóricos y prácticos. Esto implica estudiar los fundamentos del desarrollo cognitivo y las diferencias individuales en el aprendizaje de las matemáticas, así como abordar los problemas de toma de decisiones en las aulas, las escuelas y los programas de formación de profesores.

La investigación en este campo abarca un espectro que va desde la investigación pura que puede no tener una aplicabilidad inmediata a la investigación y el desarrollo tecnológico, hasta el desarrollo de materiales educativos que se prueban y evalúan en laboratorios y aulas. Cada una de las diferentes concepciones dentro de la Didáctica de las Matemáticas se caracteriza por los tipos de problemas que abordan.

La Didáctica de las Matemáticas desafía el reduccionismo al resaltar las limitaciones de teorías psicopedagógicas generales como el conductismo y el constructivismo cuando se aplican a la enseñanza de contenidos específicos. Enfatiza la importancia del conocimiento que se transmite y sugiere la necesidad de teorías de contenidos específicos que expliquen el funcionamiento del sistema educativo desde una perspectiva basada en el conocimiento. Este punto de vista es compartido por Freudenthal, quien expresa escepticismo hacia las teorías generales del aprendizaje y enfatiza la singularidad de las matemáticas en términos de enfoques pedagógicos.

La escuela francesa, aún en las primeras etapas de desarrollo de su marco teórico, prioriza las cuestiones teóricas sobre las técnicas debido a la falta de puntos de referencia seguros para las propuestas. Sin embargo, considerando la complejidad del sistema de enseñanza, la optimización de su funcionamiento requiere un esfuerzo colaborativo entre diferentes perspectivas de investigación, tanto teórica como aplicada.

La concepción fundamental de la Didáctica de la Matemática, con su mirada matemática, juega un papel significativo en la identificación de conceptos teóricos y fenómenos didácticos que contribuyen a la difusión del conocimiento matemático. La conexión entre teoría y práctica y el cambio social que exige la investigación teórica requieren la creación de una "interfaz" que actualmente está subdesarrollada. Esta interfaz podría potencialmente formarse a través del reconocimiento explícito de la investigación-acción, cuyo objetivo es lograr cambios sociales y capacitación. La investigación realizada con la participación activa de profesores en equipos de investigación puede servir como interfaz dentro del sistema de enseñanza. Kilpatrick aboga por una colaboración más estrecha entre investigadores y profesores, enfatizando la necesidad de esfuerzos conjuntos en investigación e implementación. Esto se alinea con una perspectiva sociocrítica de la investigación-acción, que busca optimizar el funcionamiento de todo el sistema.

Los paradigmas de la investigación

Al intentar evaluar críticamente los resultados de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, se hace evidente que su naturaleza es relativa a las circunstancias específicas de los participantes (profesores y estudiantes) y al contexto en el que ocurren. Así, es destacable que los descubrimientos empíricos en educación matemática no sólo carecen de universalidad en diferentes contextos, sino que su validez también puede cambiar con el tiempo debido a la sociedad en constante evolución en la que se lleva a cabo la enseñanza de las matemáticas. Otro factor que influye significativamente en la validez y la importancia de los resultados de la investigación es la perspectiva desde la que se realiza la investigación, conocida como paradigma de investigación.

Existen dos extremos de este espectro: el enfoque positivista o de proceso-producto, que apunta a descubrir leyes y confirmar hipótesis sobre conductas y procedimientos asociados con los logros de los estudiantes, y el enfoque interpretativo, que busca comprender el significado personal. de eventos, estudiar las interacciones entre los individuos y su entorno, y explorar los pensamientos, actitudes y percepciones de los participantes.

El programa positivista o de proceso-producto emplea predominantemente métodos cuantitativos, a menudo utilizando mediciones sistemáticas, diseños experimentales y modelos matemáticos, mientras que el programa interpretativo (incluidos enfoques ecológicos y etnográficos) está asociado con observaciones naturalistas, estudios de casos, etnografía e informes narrativos. Se encuentran y destacan varias características distintivas entre estos dos enfoques: la participación limitada de los invetigadores positivistas en las vidas o actividades de sus sujetos en comparación con los etnógrafos, la falta de interés entre los investigadores positivistas en los significados intersubjetivos que pueden surgir en las escuelas o aulas. estudiado, el uso poco frecuente de teorías socioculturales por parte de investigadores positivistas para interpretar sus hallazgos, y la atención limitada prestada por los antropólogos educativos dentro del enfoque interpretativo de las habilidades cognitivas, las teorías del desarrollo cognitivo y el procesamiento de la información, la renuencia a manipular variables y forzar eventos naturales, y el raro intento de abordar los problemas educativos.

Estos programas dispares coexisten y han coexistido en el campo de la enseñanza y el aprendizaje, incluidas las matemáticas, particularmente en la investigación realizada desde una perspectiva pluridisciplinaria. Sin embargo, gran parte de la investigación educativa actual, especialmente los diseños más innovadores, puede clasificarse como ocupando una posición intermedia entre estos paradigmas. Por ello se propone un modelo de investigación que comprende cuatro dimensiones o modos suposicionales: deductivo-inductivo, generativo-verificador, constructivo-enumerativo y subjetivo-objetivo.

La dimensión deductiva-inductiva se refiere a la confianza en teorías existentes o la generación de nuevas teorías a través del proceso de investigación. La dimensión generativa-verificadora se relaciona con el grado en que los resultados de un grupo pueden generalizarse a otros, y la investigación verificadora tiene como objetivo establecer generalizaciones más allá de un solo grupo. Los modos de formulación y diseño de variables y categorías de análisis definen la dimensión constructiva-enumerativa, mientras que la dimensión subjetiva-objetiva se refiere a los constructos que se estudian en relación con los participantes involucrados. Además de estos paradigmas, existe un tercer paradigma sociocrítico, que aboga por conectar la investigación con la práctica para promover una mayor libertad y autonomía entre los participantes. La mera observación de encuentros educativos en un aula es insuficiente; también es necesario proporcionar orientación directa a la práctica, lo que requiere una mayor colaboración entre profesores e investigadores.

Un ejemplo de cómo se pueden integrar varios paradigmas lo demuestra la investigación realizada por la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas. Esta investigación, se centra en el estudio de cómo se forma, controla y reproduce el conocimiento en el ámbito escolar. Un aspecto importante de esta investigación es la exploración de la relación entre los dos subsistemas involucrados - conocimiento y estudiantes - particularmente a través de la situación problemática y la gestión de esta interacción por parte del profesor.

La metodología empleada en este programa de investigación se guía por ciertos supuestos, incluida la necesidad de un enfoque holístico y de estudio de casos debido a la complejidad del fenómeno bajo investigación, así como el uso de múltiples técnicas de recopilación de datos. Además, la especificidad del conocimiento matemático permite generar hipótesis a partir del estudio de este conocimiento y sus orígenes epistemológicos. Como resultado, este programa de investigación incorpora elementos de diferentes paradigmas. Por ejemplo, las características del paradigma positivista-experimental son evidentes en la cuidadosa preparación de las lecciones, la formulación de hipótesis basadas en una teoría general y el uso de métodos estadísticos para el análisis de datos.

Por otro lado, el paradigma ecológico-etnográfico se refleja en el enfoque holístico y cualitativo del estudio del fenómeno, el interés por las variables e interrelaciones del proceso, la posibilidad de generar nuevas hipótesis durante la investigación y el uso de múltiples técnicas de recolección de datos. incluyendo métodos etnográficos como la observación. En general, el paradigma de investigación adoptado por la concepción matemática de la Didáctica de las Matemáticas se sitúa entre el razonamiento deductivo y el inductivo, así como entre los enfoques generativo y enumerativo, combinando elementos de ambos extremos del espectro.

Adoptar una perspectiva sistémica puede ayudar a resolver cualquier conflicto entre diferentes ideas y modelos. Para lograr esto, necesitamos un enfoque integrador que considere la teoría, el desarrollo y la práctica, y abrace el positivismo, el interpretativismo y la crítica. Estos diferentes puntos de vista deben verse como complementarios y parte de una comprensión más amplia. Según Steiner (1985), el concepto de complementariedad es una herramienta útil para comprender las relaciones entre diversos tipos y niveles de conocimiento y actividad.

Las perspectivas interdisciplinarias y fundamentales son compatibles y pueden trabajar juntas. Al considerar la Didáctica de las Matemáticas como parte de las matemáticas, podemos establecer una "didáctica matemática" de las matemáticas, similar a la lógica matemática o metamatemática. Si bien, esta ciencia no puede sustituir los aportes realizados por otras ciencias. Las situaciones de enseñanza involucran múltiples aspectos y fenómenos, y la Didáctica (en su sentido fundamental) aún no ha explorado y explicado completamente estos fenómenos con conceptos y métodos específicos.

Por otro lado, la incorporación de conocimiento externo es crucial y debe hacerse bajo la guía de una teoría específica. Este enfoque permite una relación sana entre ciencia y técnica en la enseñanza, en lugar de una relación basada en la prescripción y la reproducción. Kilpatrick (1981) también aboga por el eclecticismo en lo que respecta a los métodos. No debemos abandonar las técnicas estadísticas cuantitativas, que recién comienzan a aplicarse, en favor de métodos exclusivamente etnográficos.

El análisis de datos exploratorios puede complementar los métodos cuantitativos en el campo de la educación matemática. Kilpatrick también sugiere que los investigadores deberían adoptar un enfoque convergente, donde los estudios exploren un tema desde múltiples perspectivas utilizando varios métodos, en lugar de centrarse en estudios de replicación. En resumen, las preguntas planteadas en esta discusión son aspectos esenciales del programa de desarrollo propuesto por Steiner (1985) para la Teoría de la Educación Matemática. Estos aspectos incluyen identificar y abordar cuestiones clave en la orientación, fundamento, metodología y organización de la Educación Matemática como disciplina. Asimismo, desarrollar un enfoque integral de la Educación Matemática en su conjunto, considerándola como un sistema interactivo que abarca investigación, desarrollo y práctica, y enfatizando el papel dinámico del intercambio teoría-práctica y la cooperación interdisciplinaria.

La consolidación de la didáctica de la matemática

El reconocimiento de la Didáctica de las Matemáticas como "área de conocimiento" por parte del Consejo de Universidades en 1984, junto con la implementación de la Ley de Reforma Universitaria (LRU) en el mismo año, ha allanado el camino para la creación de departamentos universitarios dedicados a esta campo en España. Estos departamentos han desempeñado un papel crucial en el avance de la educación matemática, ya que se les confían responsabilidades de enseñanza e investigación en las áreas de conocimiento relevantes.

Los departamentos tienen acceso a importantes recursos de investigación, incluidos más de 200 profesores permanentes dedicados a la investigación y colecciones bibliográficas específicas. La consolidación institucional se evidencia además en la existencia de programas de doctorado y la defensa de tesis doctorales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como la financiación de proyectos de investigación en competencia con otras áreas del conocimiento.

En 1997 se formó la Sociedad de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), lo que demuestra la creciente conciencia de los intereses y necesidades específicos de la comunidad de investigación en didáctica de las matemáticas. El ámbito de la acción práctica es principalmente dominio del profesor, quien es responsable de instruir en matemáticas a uno o más grupos de estudiantes. El principal objetivo de un docente es potenciar el aprendizaje de sus alumnos, por lo que su interés principal es obtener información que pueda tener un impacto inmediato en su enseñanza.

Por otro lado, el componente tecnológico, también conocido como investigación aplicada, está más enfocado a prescribir soluciones y desarrollar dispositivos de acción. Este campo está habitado por diseñadores de currículos, autores de manuales escolares y creadores de materiales didácticos. Finalmente, la investigación científica, que abarca estudios básicos, analíticos y descriptivos, se ocupa principalmente del desarrollo de teorías. Este tipo de investigación suele realizarse en instituciones universitarias. La educación matemática es un sistema complejo y diverso que consta de tres componentes o campos distintos:

- En primer lugar, existe una acción práctica y reflexiva, que implica que los docentes participen activamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con las matemáticas.
- En segundo lugar está la tecnología didáctica, que se centra en el desarrollo de materiales y recursos utilizando el conocimiento científico.
- Por último, está la investigación científica, cuyo objetivo es comprender el funcionamiento general de la enseñanza de las matemáticas, así como los sistemas de enseñanza específicos que involucran a profesores, estudiantes y conocimientos matemáticos.

A pesar de su interés compartido en mejorar la educación matemática, estos tres campos tienen diferentes perspectivas, objetivos, recursos disponibles, reglas operativas y restricciones. A nivel internacional, la educación matemática también ha experimentado una consolidación con la existencia de instituciones e institutos de investigación similares en países como México y Alemania. Además, existen varias revistas y manuales de investigación dedicados al campo, así como conferencias internacionales que brindan vías para que los investigadores compartan sus hallazgos y colaboren. La ICMI, una comisión internacional sobre instrucción matemática, ha desempeñado un papel importante en la promoción de la investigación en educación matemática a lo largo del siglo XX. Su estudio realizado en Washington en 1994 destacó la madurez de la educación matemática como disciplina científica con sus propios objetivos y métodos, solidificando aún más su estatus como un campo de estudio distinto.

En lo referente a programas y métodos de investigación, ha habido un cambio desde el uso principalmente de un enfoque psicoestadístico en los años 70 y 80, que se centraba principalmente en las pruebas y su confiabilidad. Ahora hay una proliferación de métodos, la exploración de diferentes agendas de investigación y la adopción de posiciones eclécticas. Esto no significa que el enfoque psicológico haya perdido importancia, como lo demuestra la vitalidad del grupo internacional PME.

Actualmente se realizan investigaciones utilizando diversos enfoques, como métodos interpretativos, etnográficos, antropológicos y sociocríticos. Algunos sostienen que esta diversidad es beneficiosa, ya que permite considerar diferentes perspectivas. Sin embargo, creo que puede generar confusión entre las comunidades de investigación y hacer que los esfuerzos sean menos productivos. La multitud de enfoques, teorías y métodos en la investigación en educación matemática exige un enfoque más estructurado y organizado, similar a la filosofía de la ciencia.

Si bien la didáctica de las matemáticas puede considerarse una disciplina madura sociológicamente, puede no serlo filosófica o metodológicamente. El problema de la diversidad en las teorías ha sido abordado por el Congreso Europeo de Educación Matemática (CERME) en su grupo de trabajo, lo que ha dado lugar a la publicación de varios trabajos en actas de congresos y en la revista ZDM.

Estos desafíos incluyen dificultades en la comunicación debido a diferentes supuestos y lenguajes, discrepancias en los resultados empíricos debido a diferentes perspectivas y obstáculos al progreso científico. Se sostiene que para que la diversidad de teorías sea fructífera, deben interactuar diferentes enfoques y tradiciones. Para abordar estos desafíos, se deben buscar activamente estrategias que conecten teorías y enfoques teóricos. Esto se puede hacer a través de estudios empíricos que combinen diferentes enfoques teóricos, desarrollando teorías como parte de un conjunto conectado para reducir su número y aclarar sus fortalezas y debilidades, y fomentando un discurso sobre el desarrollo de la teoría y sus cualidades en la investigación en educación matemática, que también considere Consideraciones metateóricas y metodológicas.

Al discutir el aspecto de la educación matemática conocido como práctica reflexiva, es importante reconocer el importante papel que desempeñan las asociaciones de profesores de matemáticas en varios niveles: regional, nacional e internacional. Así se pone de manifiesto en la existencia de organizaciones como la Federación Española de Asociaciones de Profesores de Matemáticas, que está formada por 12 sociedades regionales, así como sus respectivas revistas y congresos dirigidos a profesores.

A nivel internacional vemos la influencia de instituciones poderosas como el NCTM en EE.UU., el ICME y el FISEM, junto con su revista UNIÓN. Sin embargo, es crucial reconocer que estas actividades a menudo tienen conexiones limitadas con el componente científico y académico de la educación matemática. Esto es evidente a través de la existencia de sociedades profesionales independientes y revistas separadas para "profesores" e "investigadores" en países como España, Francia y Portugal.

Esta desconexión es evidente en el desarrollo de los planes de estudios de matemáticas, que tradicionalmente han sido preparados por comisiones que pasan por alto la experiencia de los departamentos universitarios especializados. La separación entre la academia y la práctica es más pronunciada en la formación inicial y el desarrollo profesional continuo de los profesores de matemáticas de la escuela secundaria, donde existe una participación limitada de los especialistas en educación matemática. En conclusión, si bien la educación matemática ha logrado avances significativos como disciplina académica en el escenario internacional durante las últimas tres décadas, su desarrollo ha sido desigual en diferentes aspectos y particularmente en la integración entre ellos.

Conclusión

Freudenthal fue un firme defensor de la reforma de la educación matemática tradicional. Su extensa labor como fundador y participante activo en grupos como el Consejo Internacional de Educación Psicológica y Matemática (PME) y la Comisión Internacional para la Investigación y Mejora de la Educación Matemática (CIEAEM) contribuyó en gran medida a su fama. En estos foros, expresó su oposición a los enfoques pedagógicos y didácticos dominantes de mediados del siglo XX, como la teoría de las metas de desempeño, las pruebas de evaluación estructuradas y las encuestas educativas estandarizadas y la aplicación directa del estructuralismo y constructivismo de Piaget en el aula.

Hans Freudenthal, matemático y educador nacido en Alemania, obtuvo su doctorado en la Universidad de Berlín. Sin embargo, debido a su origen judío, se vio obligado a emigrar de Alemania durante el ascenso del régimen nazi. Buscó refugio en los Países Bajos, donde continuó sus estudios y desarrolló teorías pedagógicas. Desafortunadamente, tuvo que esconderse durante la Segunda Guerra Mundial. Freudenthal creía que el proceso de aprendizaje debe basarse en situaciones que requieran organización. Criticó a Piaget por intentar imponer el desarrollo psicológico al sistema de categorías utilizado por los matemáticos, utilizando términos matemáticos con diferentes significados.

Basándose en su propia experiencia, Freudenthal argumentó que el aprendizaje está más estrechamente relacionado con el desarrollo del lenguaje que con el desarrollo cognitivo. Le preocupaba cómo el trabajo de Piaget influía en los profesores que convertían los resultados de la investigación en directrices para la educación matemática, convirtiendo esencialmente una teoría epistemológica en una violación de la teoría pedagógica.

Habló con Chevallard sobre su teoría de la transposición, que creía que se basaba en el conocimiento experto de los matemáticos. Freudenthal argumentó que las matemáticas que se enseñan en las escuelas no deberían reflejar ninguna interpretación de ideas filosóficas o científicas a menos que fueran mucho más antiguas. La oposición de Freudenthal a la psicología, la pedagogía y los métodos didácticos entonces predominantes no carecía de fundamento. Esto se basa en su amplio conocimiento de las matemáticas, su pasión por enseñar matemáticas y su experiencia directa en el aula. Cuestionó la naturaleza artificial de los objetivos educativos y los campos de estudio de Bloom, argumentando que tenían un impacto negativo tanto en las pruebas académicas como en las de desarrollo. Acusó a Bloom de ver el aprendizaje como un proceso en el que el conocimiento simplemente se transmite a la cabeza del estudiante. De manera similar, no estaba de acuerdo con la opinión de Gagne de que el aprendizaje es un proceso continuo, que se desarrolla desde estructuras simples hasta estructuras complejas.

En conclusión, Freudenthal cree que el aprendizaje implica saltos repentinos en el replanteamiento, demostrado por los estudiantes encuentran atajos en sus estrategias, cambian perspectivas y utilizan modelos con distintos grados de formalidad. No obstante, las referencias de Freudenthal a autores no matemáticos son limitadas, reconoce la influencia de Decroli, cuyos intereses coincidieron con sus propias teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas en contextos cotidianos, y Dewey, en quien ve similitudes en la idea del replanteamiento guiado y, estuvo influenciado por la pedagogía fenomenológica de Lagenveld.

Bibliografía

Bauersfeld, H., Krummheuer, G. y Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies.En H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds.). *Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Educatíon (Didactics of Mathematics)* (pp. 174-168). Antwerp: Proccedings of the 2nd TME-Conference. University of Antwerp.

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación matemática realista bases teóricas. *Educación*, *63*, 1-11.

Brousseau, G. (1988). Utilité et interet de la didactique pour un professor de college. *Petit* x(21), 47- 68.

Burkhardt, H. (1988). The roles of theory in a 'sistems' approach to mathematical education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5*, 174-177.

Bunge, M. (1985). *Epistemología.* Barcelona: Ariel.

English, L. (2008). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed.). London: Routledge, Taylor & Francis.

English, L. y Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. En B. Sriraman y L. English (Eds), *Theories of Mathematics Education* (pp. 263-289). Heidelberg: Springer-Verlag.

Fischbein, E. (1990). Introdution (Mathematics and Cognition). En: P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition.* Cambridge: Cambridge University Press.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education. Doctoral dissertation, Utrecht University.* Utrecht: Cd Beta Press.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer and E. C. D. M. van Lieshout (eds), *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures.* Utrecht: Cd Beta Press), 13-34.

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). HANS FREUDENTHAL, un matemático en Didáctica y teoría curricular. *Journal of Curriculum Studies*, *32*(6), 777-796.

Gimeno Sacristán, J. (1986). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo*. Madrid: Anaya.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J.D. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica.

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 1*(2), 3-7.

Hurford, A. (2010). Complexity theories and theories of learning: Literature reviews and synteses. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education.* Seeing new frontiers. (pp. 567-589).

Keitel, C. (1987). What are the goalsof mathematics for all? *Journal of Curriculum Studies*, *19*(5), 393-407.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. *Proc. 11th Conference PME*. Montreal, p. 3-23.

Lester, F. K. (2010). On the theoretical, conceptual and philosophical foundations for research in mathematics education. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers.* (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.

Mosterín, J. (1987). *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid: Alianza Universidad.

Schoenfeld, A.H. (1987). Cognitive science and mathematics education: an overview. En A. H. Schoenfel (Ed.), *Cognitive science and mahtematics education.* London: LEA, p. 1-32.

Silver, E. A. y Herbst, P. (2007). Theory in mathematics education scholarship. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematicas Teaching and Learning* (pp. 39-67). Charlotte, NC: Information Age Publishing and Reston, VA: National Council of Tearchers of Mathematics.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologías de las matemáticas y de la educación matemática. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876. [Traducción de Juan D. Godino]

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research.* Dordrecht: Kluwer.

Steiner, H.G. (1990). Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 6*, 194-197.

Treffers, A. (1987). *Didactical background on a mathematics program for primary education.* Dordrecht: Reidel.

Vergnaud, G. (1988). Why is psychology essential? Under which conditions?. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Fondations and Methodology of the discipline Mathematics Education*. Procceding 2nd TME- Conference. Bielefeld - Antwerp.

Zolkower, B., & Bressan, A. (2012). Educación matemática realista. *Educación Matemática. Aportes a la Formación Docente desde Distintos Enfoques Teóricos (Pochulu M. & Rodrıguez M. eds). Argentina: UNGS–EDUVIM*, 175-200.

De esta edición de “*Teoría matemática realista de Hans Freudenthal: Didáctica y paradigmas de la investigación”*, se terminó de editar en la ciudad de Colonia del Sacramento en Agosto de 2024

EST. 2021

EMC

EDITORIAL MAR CARIBE

ISBN: 978-9915-9706-0-8

EST. 2021 EMC
EDITORIAL MAR CARIBE

TEORÍA MATEMÁTICA REALISTA DE HANS FREUDENTHAL: DIDÁCTICA Y PARADIGMAS DE LA INVESTIGACIÓN

LIBRO DE INVESTIGACIÓN

COLONIA DEL SACRAMENTO, URUGUAY
2024